

**I. Die Elasticität von Kalkspathstübchen;
von G. Baumgarten.**

Eine Vorlesung des Hrn. Geh.-Rath Neumann in Königsberg über Elasticitätstheorie, in der er u. a. die Aufmerksamkeit auf die Bestimmung der Elasticitätscoëfficiënten krystallinischer Körper hinlenkte, veranlaßte mich diese Bestimmung zu versuchen.

Während bei unkrystallinischen Medien die Angaben über die Elasticitätsconstanten für denselben Stoff oft weit aus einander gehen, durfte man bei krystallinischen von vornherein auf eine bessere Uebereinstimmung der Beobachtungen rechnen, da ja hier das Material so rein und homogen gewählt werden kann, wie nur immer die Wirklichkeit es zu bieten vermag. Dafs trotz dieser wohlbegründeten Vermuthung die Aufgabe nicht schon behandelt worden ist, hat wohl daran gelegen, dafs die erforderliche Bearbeitung krystallinischer Körper für sehr beschwerlich, wenn nicht für unmöglich gehalten wurde. Meines Wissens wenigstens sind directe Beobachtungen über das elastische Verhalten von Krystallen noch nicht vorhanden ¹⁾.

Was die specielle Wahl des Materials anlangt, so entschied ich mich aus doppeltem Grunde für Kalkspath;

- 1) Die Arbeit, wie sie vorliegt, war bereits Weihnachten 1872 fertig; sie wurde zu dieser Zeit der philosophischen Facultät zu Leipzig als Dissertation vorgelegt. Umstände halber konnte sie erst jetzt dem Druck übergeben werden. Unterdeß hat mein Freund Dr. Voigt die Elasticitätsverhältnisse des Steinsalzes untersucht. Siehe dessen Dissertation: „Untersuchung über die Elasticitätsverhältnisse des Steinsalzes.“ Leipzig.

theils weil gerade er hinsichtlich seiner übrigen physikalischen Eigenschaften besser bekannt ist, als irgend ein anderes Mineral; theils weil ich ihn von Rabenstein bei Chemnitz, einem den Mineralogen nicht unbekannten Fundorte, in größeren Quantitäten wohlfeil zu beziehen hoffte. Dieser letztere Grund freilich erwies sich bald als unstichhaltig, da die von dorthier bezogenen Stücke durchgängig nicht bruchfrei waren. Statt dessen arbeitete ich nunmehr mit vollständig reinem, bruchfreien Doppelspath aus Island, den ich anfangs vom verstorbenen Dr. Krantz in Bonn, später von einem Kopenhagener Edelsteinhändler S. Henriques in prachtvollen Spaltungsstücken bezog. —

Die Art und Weise der Elasticitätsconstantenbestimmung war durch die Natur des Materials vorgezeichnet. Jedenfalls mußte man absehen von der Dilatation herzustellender Stäbchen in der Längsrichtung und dafür versuchen Kalkspathstäbchen, nach verschiedenen Richtungen geschnitten, zu *biegen*.

Folgenden Plan hatte ich mir für die Untersuchung vorgezeichnet. Nachdem Vorarbeiten die Lösbarkeit der Aufgabe dargethan, sollten die Elasticitätsverhältnisse der Reihe nach in drei zu einander senkrechten Ebenen untersucht, und als erste der Hauptschnitt durch eine Rhomboëderkante (und die kurze Diagonale der gegenüberliegenden Rhomboëderfläche) gewählt werden. Ich glaubte auf Grund dieser Beobachtungen mir ein Bild von der Gestalt der Elasticitätsoberfläche machen zu können. Der eben bezeichnete Hauptschnitt, welcher den Anfang in der Untersuchung machte, möge im Folgenden der Kürze halber Hauptschnitt I genannt werden.

I.

Voruntersuchung. Geeignetste Form für die Stäbchen.

Es galt, wenn überhaupt die Herstellung möglichst langer und dünner Stäbchen, wie die Biegungsversuche sie erfordern, gelungen war, vor Allem diejenigen beiden Fragen

zu beantworten, an deren Entscheidung die Lösbarkeit der ganzen Aufgabe hing: einmal, ob derartige Stäbchen meßbare Biegungen zeigten, und sodann, ob die Unterschiede der Biegungen bei nach verschiedenen Richtungen hin geschnittenen Stäbchen gegen die Beobachtungsfehler beträchtlich genug wären.

Der einfachste Weg zur Herstellung brauchbarer Stäbchen — deren Querschnitt vorerst quadratisch genommen werden sollte — war der, zunächst etwas dickere Säulen mit Laubsäge und auftröpfelndem Wasser aus dem Spath herauszuschneiden und deren Querschnitt dann durch Schleifen zu verkleinern, so weit es eben ging.

Ich schnitt etwa 50^{mm} lange Stäbchen, erst parallel einer Spaltungsfläche, dann senkrecht in der Richtung einer Kante; und schliiff den quadratischen Querschnitt bis auf etwa 9^{mm} ab. Wie und mit welchen Vorrichtungen ich dabei arbeitete, wird der nächste Abschnitt näher anführen.

Nachdem dieß gelungen war, prüfte ich ihre Biegsamkeit. Die Probe wurde mir außerordentlich erleichtert durch einen für dergleichen Versuche bereits gebauten und mir freundlichst zur Benutzung überlassenen Apparat des Neumann'schen Cabinets, denselben, der auch in der Folge diente und weiterhin genauer beschrieben ist. An dieser Stelle sey nur kurz erwähnt, daß das Stäbchen auf zwei vertical stehenden, oben scharfkantigen Trägern, in Abstand von etwa 47^{mm}, auflag und quer darüber eine Waagschale mit einer Schneide übergehängt war. Nach erfolgter Belastung ward durch ein fest davor angebrachtes Mikroskop mit Fadenkreuz und Mikrometerschraube die Senkung gemessen.

Das Resultat der ersten Versuche war ein, wenn auch nicht unbedingt negatives, so doch wenig versprechendes zu nennen, indem die höchsten möglichen Drucke von wenig unter 2 Pfd.¹⁾ die außerordentlich geringe Biegung

1) Bei 2 Pfd. war die Elasticitätsgränze erreicht, und das Stäbchen brach nach einer Spaltungsfläche.

von $\frac{1}{512}$ (es wurden an der Mikrometerschraube 15 Skalentheile abgelesen) hervorbrachten.

Auf Grund solcher Werthe konnte an eine exacte Behandlung der elastischen Verhältnisse nicht gedacht werden. Daher mußte ich, um grössere Biegungen zu erlangen, den Stäbchen eine andere Form geben.

Der quadratische Querschnitt war unter andern um deswillen gewählt worden, weil, wenn man das Stäbchen der Reihe nach auf verschiedene Seiten auflegte, sich bei *gleich grosser* Höhe und Breite am unmittelbarsten feststellen liess, ob dasselbe Stäbchen nach verschiedenen zur Längsaxe normalen Richtungen hin verschiedene Biegbarkheit zeige oder nicht. Es war dies, wie von vornherein zu erwarten stand, *nicht* der Fall; vielmehr haben später zu erwähnende Versuche bestätigt, dafs, wenn eine Dimension vor den beiden andern durch Grösse hervorragt, von den vorkommenden Richtungen nur die der grössten Dimension auf die Biegbarkheit von Einflufs ist.

War es aber hiernach erlaubt, von dem quadratischen Querschnitt abzugehen, so lag ein Mittel nahe, die Stäbchen biegbarer zu machen, ohne doch ihrer Dauerhaftigkeit Eintrag zu thun. Die Formel nämlich, welche für elastische Stäbe zunächst zwar nur unkrystallinische, gilt, für krystallinische indess auf alle Fälle eine bedeutende Annäherung liefert, gab dies Mittel an die Hand. Bedeutet s_1 eine bestimmte Senkung, s diejenige bei 1mal so grosser Länge, b facher Breite, d facher Dicke, so ist

$$s = \frac{l^3}{bd^3} s_1.$$

Da die Biegungsgrösse der Dicke in dritter Potenz, der Breite hingegen nur in erster Potenz umgekehrt proportional ist, so hatte ich nur nöthig, während die Breite in etwas vergrössert ward, dafür andererseits *die Dicke erheblich zu mindern*.

Eine zweite Verbesserung konnte darin bestehen, dafs ich die Stäbchenlänge vergrösserte, ein Ausweg, der freilich die Zerbrechlichkeit in nicht geringem Maafse erhöhte und von dem ich deshalb auch später wieder zurückkam.

Mit so verbesserten Stäbchen, die ca. 60^{mm}—80^{mm} lang, 4 $\frac{1}{2}$ ^{mm} breit und 1 $\frac{1}{4}$ ^{mm} dick waren, erzielte ich schon weit bessere Resultate, denn die Durchbiegung bei der Maximalbelastung war bei ihnen auf $\frac{45}{213}$ ^{mm} bis $\frac{60}{213}$ ^{mm} gestiegen. Die Möglichkeit exacter Bestimmungen war hierdurch dargethan.

Aber auch die zweite Frage: ob Stäbchen, nach verschiedenen Richtungen geschnitten, meßbare Unterschiede ihrer elastischen Biegungen zeigen würden, konnte bald entschieden und zwar bejaht werden. Zwei Stäbchen, die unter Winkeln, von 22° und 74° gegen die Kante geschnitten und die beide mit einiger Vorsicht bis auf die Dimensionen der oben erwähnten Stäbchen abgeschliffen worden waren, ergaben Durchbiegungen, die nicht nur unter einander, sondern auch von denen der Kantestäbchen abwichen.

II.

Herstellung der Stäbchen.

Sägen. Anfangs, wo es sich für die Voruntersuchung nur um Stäbchen in Richtungen einer *Spaltungsfläche* handelte, reichte das einfache Mittel, etwas dickere Säulen mit Laubsäge und Wasser aus dem Spath herauszuschneiden, vollkommen aus.

Das Spaltungsstück wurde mittelst einer Mischung aus Wachs und Harz (zu gleichen Theilen) auf eine, auch fernerhin benutzte Sägevorrichtung festgeklebt. Diese besteht aus einem 40^{cm} langen, 12^{cm} breiten, unten mit Zarge versehenen Bret, quer über dessen Mitte ein Holzbügel aufsteigt, bestimmt zur Führung des Sägebügels wie des Blattes, der deshalb in seiner unteren Hälfte schmal, in seiner oberen etwas breiter gespalten ist. Derselbe ist zwar drehbar, damit auch in nicht vertikalen Ebenen gesägt werden könne, indess geschah dies *nie*.

Später, wo ich für die eigentliche Hauptuntersuchung Stäbchen in Richtungen des Hauptschnitt I. schneiden sollte, versagte die Säge den Dienst. Schon die *Herstellung* des Hauptschnitt I. überzeugte mich davon.

Ich verwendete hierfür ein vollkommen klares, sprungfreies Spaltungsstück von 55^{mm} Höhe und 65^{mm} Breite und Länge und suchte wiederum mit Laubsäge und Wasser den genau vorgezeichneten Schnitt durchzuführen, dabei zeigte sich indessen, daß überall längs des Randes beim Durchschneiden kleine Stückchen heraussprangen; Beweis genug, daß die Säge für diesen Schnitt zu grob arbeite. Das Sägeblatt wurde jetzt durch dünnen Kupferdrath ersetzt, der unter fortwährendem Zutropfeln von Schmirgelswasser freilich langsam (200 [□] in 1½ Stunde) aber sehr accurat und mit wenigem Bruch schnitt. Dieser Schmirgelsäge (mit einer einmal nöthigen kleinen Abänderung, von der später die Rede seyn wird) bediente ich mich in der Folge durchgehends und sie ließ nie im Stich.

Um für die weitere Bearbeitung die so erhaltene Hauptschnittfläche horizontal zu haben, goß ich in einem umgelegten Ramen dem Spath einen Fuß aus Harzwachsmasse an, deren Niveau dem Hauptschnitt parallel gemacht wird. Danach wenn, parallel zum Hauptschnitt, vertical gesägt werden sollte, ward für jede einzelne Stäbchenrichtung im Hauptschnitt ein neuer Fuß gegossen.

Die Abtrennung jedes einzelnen Stäbchens im Hauptschnitt erfolgte, nachdem seine Axenrichtung genau vorgezeichnet worden war. Dies geschah nicht unmittelbar auf dem Hauptschnitt durch Vorritzen, sondern durch Construction auf einem Stück Papier, das dann aufgeklebt wird. Die Winkel der Axenrichtungen sind in Folgendem stets von der Hauptaxe aus, links- und rechtsum gerechnet, so daß z. B. der Winkel der Kante mit + 36° 44', der der gegenüberliegenden Seitenfläche mit — 45° 20' bezeichnet ist. Das Stäbchen wurde erst an der Breitseite, dann behutsam an der schmalen abgetrennt.

Eine hierbei auftretende Erscheinung, welche Interesse bieten dürfte, will ich nicht unerwähnt lassen. War nämlich bei gewissen Richtungen die Schmalseite zu zwei Dritteln oder drei Vierteln losgesägt, so brach sie von selbst und zwar *rein muschel*ig ab. Besonders leicht und

schön entstand dieser Bruch bei den Stäbchen parallel der Hauptaxe und den unter $-22\frac{1}{2}^{\circ}$ geneigten, weniger gut bei den $+22\frac{1}{2}^{\circ}$ = und den 90° = Stäbchen, gar nicht bei den $+45^{\circ}$ =, -45° =, $+67\frac{1}{2}^{\circ}$ = und $-67\frac{1}{2}^{\circ}$ = Stäbchen, was sich wohl aus der Lage der Stäbchenaxe gegen die Spaltungsfläche erklären wird. In noch frappanterer Weise zeigte sich diese Erscheinung, freilich nur in einem einzigen Falle bei einem Breitseitenschnitt. Es sprang, nachdem die Säge etwa 1^{mm} tief eingedrungen war, eine 1^{mm} dünne, $1\frac{1}{2}^{\text{mm}}$ breite und 45^{mm} lange Lamelle ($\frac{3}{4}$ Stäbchenlänge) als ein einziges Stück los mit einer zum Hauptschnitt muschligen Bruchfläche. Ich erwartete, derselbe Bruch würde an Stäbchen der einen oder anderen Richtung des Hauptschnitts sich später beim Zerschneiden während des Biegens (das zu beobachten ich sattsam Gelegenheit hatte) einstellen; doch war dies nie der Fall. Vielleicht gelingt es trotzdem noch, die Umstände festzustellen, unter denen er immer herbeigeführt werden kann.

In der Herstellungsart machte eine Abweichung sich bei den Stäbchen senkrecht zur Hauptaxe nöthig; Kupferdrath und Schmirgel rissen hier lauter kleine dreiseitige Pyramidchen aus dem Spath heraus und arbeiteten in Folge dessen so ruck- und stoßweise, daß mit ihnen gar keine Säule unversehrt herausgeschnitten werden konnte. Eingespannter Eisendrath (Claviersaitendrath) bot in diesem Falle brauchbaren Ersatz. In allen anderen Richtungen reichte die Kupfersäge aus.

Schleifen. Als Schleifmittel diente anfangs Wasser und Streusand, der vorher mit Glasplatte auf Glas möglichst fein und gleichmäßig zerrieben worden war. Der häufige Bruch der Stäbchen beim Schleifen veranlaßte mich indessen, andere Mittel als Quarz zu probiren, lange ohne Erfolg. Schmirgel, weit härter als der freilich sehr ungleichmäßige Streusand, erschien mir zu scharf. Spät erst wurde ich (von Herrn Prof. Zirkel) wiederholt auf Schmirgel hingewiesen. Ich zerrieb nunmehr feinsten

Schmirgel vor der Benutzung möglichst gleichmäÙig und war jetzt in der That in Stand gesetzt, schneller und besser zu schleifen als vorher.

Es ist mir auf diese Weise gelungen, die Stäbchen bis auf fast $\frac{1}{2}$ mm Dicke abzuschleifen.

Das Schleifen geschah in der Weise, daÙ ich mehrere rohe Stäbchen, wie sie die Drathsäge geliefert hatte, mit dickflüssigem Terpentin zu einer Platte zusammenklebte und diese dann mit der oben erwähnten Harzwachsmasse auf eine Glasplatte als Handhabe befestigte. So wurden der Reihe nach alle Seiten jedes Stäbchens mit Wasser und Schleifmittel auf einer Spiegeltafel so lange abgeschliffen bis die gewünschte Kleinheit des Querschnitts erreicht war.

Sehr störend war hierbei eine Erfahrung, die ich während der Hauptuntersuchung beim Abschleifen der Stäbchen *gewisser* Richtungen machen musste. Wie in früheren Fällen klebte ich zum Abschleifen der Schmalseite die Stäbchen zu je 6 zu einer Platte zusammen, mit den Breitseiten an einander, und schliff 4—6 solche Platten — ihrerseits wieder auf einer Glasplatte befestigt — gleichzeitig. Diesen Schliff, bei dem die Stäbchenbreite von 5 mm auf 4 mm gemindert werden sollte, hielten die Stäbchen zweier Richtungen, — 45° und — $22\frac{1}{2}^\circ$ nicht aus, sondern zersprangen trotz feinen Schleifmaterials in lauter kleine Stücke. Nach wenig Schleifzügen waren alle — 45° = und — $22\frac{1}{2}^\circ$ = Stäbchen ein Aggregat von kurzen Spaltungslamellen. Ich half mir so, daÙ ich parallel dem Hauptschnitt eine breitere Platte heraussägte, sie bis auf ca. 4 mm Dicke abschliff, polirte*) und nun erst in einzelne Stäbchen zersägte. Das ging leicht bei den — 45° Stäbchen von Statten, deren Breitseite einer Spaltungsfläche parallel ist, weniger gut bei den — $22\frac{1}{2}^\circ$ = Stäbchen, indem diese, sowie der Schnitt 3 mm tief eingedrungen war, parallel einer der Spaltungsflächen schräg absprangen,

*) s. w. u.

so daß die untere Schmalseite der Stäbchen abgeschrägt und dadurch bedeutend verschmälert wurde. Dieselbe Beobachtung, nur in noch höherem Grade, machte ich auch sonst, wenn ich mir Stäbchen durch Zerschneiden von Platten herzustellen suchte; deshalb war für andere Richtungen diese Herstellungsweise geradezu unmöglich.

Beim Breitseitenschliff zeigten sich namentlich die Stäbchen parallel der Hauptaxe sehr empfindlich; am Dauerhaftesten die $-45^{\circ} = u. +67\frac{1}{2}^{\circ}$ -Stäbchen.

Poliren. Meine ursprüngliche Absicht ging dahin, alle Flächen der geschliffenen Stäbchen, etwa mit geschlemmtem Colcothar so zu poliren, daß ich genaue Winkelmessungen am Reflexionsgoniometer mit ihnen vornehmen könnte. Allein trotz vielfachen Probirens kam ich mit dieser Politur nicht weit; die fertigen Flächen reflectirten nur bei großem Einfallswinkel scharf. Ich mußte mich damit begnügen und hoffen, daß eine ganz genaue Winkelbestimmung der Längsaxenrichtung der Stäbchen nicht nothwendig seyn würde, was sich denn auch später herausstellte.

III.

Beobachtungsmethode.

Messapparat. Die Biegungsversuche wurden mit einem schon früher erwähnten Apparat des Neumann'schen Cabinets hergestellt. Es sei mir gestattet, hier seine Einrichtung zu beschreiben. (Siehe Figurentafel VI.)

Ein hartes festes Tischchen, das mit drei Stellschrauben horizontal gestellt werden kann, trägt auf seiner oberen Fläche eine 15^{mm} dicke Eisenplatte eingesenkt, deren mittleres Drittel wieder von einem starken mit Führungsbolzen versehenen Messingmaafstab bedeckt ist. Längs desselben lassen zwei geschlitzte Messingschlitten mit Marke sich hin und herschieben und können mittelst Klemmschrauben fixirt werden. Die Schlitten tragen an den einander zugewandten Enden senkrechte, oben kantig

zugeschärfte Messingstützen zum Auflegen der zu biegenden Stäbchen. Messingstreifen und Eisenplatte sind in der Mitte durchbohrt. Ein hindurch gesenkter Stift trägt an seinem oberen Ende in einem kleinen, auf Stiftchen lose aufgesteckten Messinggestelle eine nach unten gekehrte Schneide, die auf dem Stäbchen aufliegt, unten an einem Haken hängt die Wagschale.

Die Senkung nach Auflegen der Gewichte wird gemessen mit Hülfe eines, vor dem Stäbchen festliegenden horizontalen Mikroskops (dasselbe ist zwar verstellbar, blieb indessen stets in seiner Lage). In diesem befindet sich ein Fadenkreuz, welches durch eine sehr gut gearbeitete Mikrometerschraube auf und ab bewegt werden kann. Um Bruchtheile von Umdrehungen ablesen zu können, ist die Schraubenmutter an ihrer äußeren Peripherie in 100 Theile getheilt. Die Ganghöhe der Schraube entspricht demnach 100 solchen Skalentheilen; 815 dieser Theile gehen auf 1^{mm}, wie eine directe Messung an einer sehr genau gearbeiteten Schubleere (aus Bessel's Nachlaß) ergab.

Die Belastung erfolgte anfangs ohne Weiteres mit behutsam aufgelegten Gewichten, bald aber mußte ich bemerken, daß trotz aller Ruhe kleine Stöße unausbleiblich waren. Diese zu vermeiden ward eine höchst einfache Arretur angebracht. Der Bügel der Wagschale wurde über die Mitte eines einarmigen Hebels gehängt, der um eine feste horizontale Axe drehbar ist, während das Ende des langen Hebelarmes auf einer excentrischen Scheibe schleift. Durch Drehung derselben an langem Kurbelgriff kann die Wagschale langsam, ohne jeden Stoß, auf und ab bewegt werden. Nachdem sie arretirt, belastet worden ist, beginnt erst, nach fast halber Umdrehung der Scheibe, der Druck der Gewichte auf die Stäbchen zu wirken.

Die beiden Messingträger, die man auf gleichem Abstand von der Mitte vor dem Mikroskop einstellt, sind außerdem an der scharfen Kante mit Theilung versehen;

auf deren Mitte wieder nun kommt das Stäbchen zu liegen und es drückt dann auch die Wagschale mit der Mitte ihrer Kante.

Bestimmung der Biegungen. Als Abstände der unterstützenden Schneiden (Stäbchenlänge l) wurden im Ganzen nur zwei gewählt, $l = 16''$ par. u. $l = 20''$ par.*) und für jeden derselben sämtliche Stäbchen durchbeobachtet; und zwar bei theils drei, theils vier verschiedenen Belastungen 1, (1'), 2, 2'.

Als Marke, auf die während des Biegens der Durchschnittspunkt des Fadenkreuzes eingestellt wurde, benutzte ich in den ersten Versuchen eine Stäbchenkante. Indess erwies sich diese Einstellung als doch nicht scharf genug. Ich zog deshalb längs jeder Schmalseite in der Mitte ein Stückchen Spinnwebefaden auf; auf diesen war eine ziemlich scharfe Einstellung des Fadenkreuzcentrums möglich.

Jeder der Biegversuche wurde nun in folgender Weise angestellt. Die Arretur der belasteten Wagschale ward aufgehoben und auf das gebogene Stäbchen das Fadenkreuz eingestellt. Jetzt ward auf's Neue arretirt, nun eingestellt auf das zurückgegangene Stäbchen, und die Senkung, die vorher stattgefunden hatte, an der Mikrometerschraube abgelesen. Dasselbe wurde in kurzen Zwischenräumen dreimal hinter einander vorgenommen, also jedesmal drei gleichwerthige Messungen gemacht.

Zu weiterer Controle aber ward an jedem Stäbchen bei bestimmter Länge und Belastung nicht nur in einer, sondern in vier verschiedenen Lagen beobachtet; jedes Stäbchen ward nach der ersten dreifachen Beobachtung umgedreht, danach umgewendet, zuletzt nach dem Umwenden wieder umgedreht, so daß ein Punkt, den auf einer Breitseite ich mit Tinte markirte, der Reihe nach rechts oben, links oben, links unten, rechts unten zu liegen kam. Diefß ergab also für jedes Stäbchen bei bestimmter Länge und Belastung je 3 mal 4 Messungen, welche, wie die Tabellen ausweisen, als gleichwerthig anzusehen sind.

*) $36,2''$; $45,2''$;

IV.

Bestimmung der Dimensionen, der Winkel und der Gewichte.

Um die Resultate aller dieser Beobachtungsreihen unter einander vergleichen zu können, kam es vor Allem darauf an, die Dimensionen der Stäbchen einer genauen Messung zu unterwerfen. Denn obschon sämtliche hier benutzte Stäbchen parthienweis (auf nur zwei Male) geschliffen sind, so konnte es nicht fehlen, daß gleichwohl ihre Dimensionen kleine Abweichungen zeigen (bei gleichzeitig geschliffenen höchstens $\frac{1}{11}$ mm).

Die Verschiedenheiten der *Längen* waren gleichgültig, weil von jedem Stäbchen nur das Stück zwischen den beiden Trägern in Betracht kommt. Deren Abstand aber war in der angegebenen zweifachen Weise fixirt worden, um von Haus aus Reductionen thunlichst zu umgehen. Die Längen $l = 16''$ par. und $l = 20''$ par. wurden auf dem Messingmafsstab mit Hülfe der Loupe eingestellt.

Die geringen Unterschiede der *Breite* ferner sind zwar wenig von Einfluß, da diese in der Formel nur in erster Potenz im Nenner auftritt, doch wurden auch sie mittelst eines Mikroskops und Glasmikrometer genau bestimmt.

Um so wichtiger war die Messung der *Dicke*, weil diese in dritter Potenz in die Formel eingeht. Diese Messung ward an dem Biegungsapparat vorgenommen, und zwar für jedes Stäbchen in jenen vier verschiedenen Lagen und aus den gefundenen Werthen das Mittel gezogen.

Da es galt die beobachteten Biegungen als Functionen der Stäbchenrichtungen aufzufassen, so mußte ferner sorgfältig geprüft werden, in wie weit die wirklichen Richtungen mit den beabsichtigten übereinstimmten. Zu diesen Messungen diente ein von Herrn Geh. Rath Hankel gütigst überlassenes Reflexionsgoniometer. Dieselben boten eine doppelte Schwierigkeit: die Stäbchenform war wenig handlich; und andererseits zerbrachen mehrere Stäbchen beim Anbrechen der nöthigen natürlichen Flächen. Dafs-

halb stand ich von noch genaueren Messungen ab, da ich mich überzeugt hatte, daß die Abweichung meist $\frac{1}{2}$ bis 1° , und stets unter $1\frac{1}{2}^\circ$ betrug, eine größere Genauigkeit aber nicht erforderlich schien.*)

Endlich damit die Abhängigkeit der Biegungen von dem *Gewicht* festgestellt werden konnte, waren diese genau nachzuwägen. Es waren ein 1-Lothstück und ein 2-Lothstück (altes preuß. Gewicht), die gerade als geeignet zur Hand waren, und außerdem ein wohl justirtes 10-Grammstück benutzt worden; beim Wägen auf einer feiner Wage fanden sich jene $14,788$ Gr. (Einlothstück) und $29,400$ Gr. (Zweilothstück) schwer.

V.

Ergebnisse der Beobachtung.

In der nun folgenden Uebersicht der für die Senkung gefundenen Werthe sind alle Angaben in Skalentheilen

*) z. B. wurde beobachtet als Winkel

der Breitseite				der Schmalseite	
mit derselben Spaltungsfläche.					
0°	No. 1	44° 40' (statt 45°)	91° 0' (statt 90°)	
0°	No. 2	44° 10' (" ")	91° 0' " "	
22½°	No. 3	67° 0' (" 67° 30')	89° 0' " "	
22½°	No. 4	67° 0' (" ")	89° 30' " "	
45°	No. 5	90° 8' (" 90°)	90° 4' " "	
45°	No. 6	90° 4' (" 90°)	91° 15' " "	
67½°	No. 7	112° 50' (" 112° 30')	90° 5' " "	
67½°	No. 8	113° (" ")	89° 50' " "	
90°	No. 9	135° 26' (" 135°)	90° 38' " "	
90°	No. 10	135° 35' (" ")	90° 40' " "	
— 67½°	No. 11	158° 4' (" 157° 30')	91° 8' " "	
— 67½°	No. 12	157° 36' (" ")	89° 50' " "	
— 45°	No. 13	180° (" 180°)	(vacat.) Die fehlenden	
— 45°	No. 14	180° (" ")	6 Winkelmessungen	
— 22½°	No. 15)	(vacat.)			konnte ich nicht vor-
— 22½°	No. 16)	(vacat.)			nehmen, da es unmöglich
					war, den nebenstehenden
					Stäbchen diese bestimmte
					Spaltungsfläche anzu-
					brechen.

der Mikrometerschraube des Apparats zu verstehen, 815 auf 1^{mm}.

In gleichem Maße sind die *Dicken* ausgedrückt.

Die Einheiten der *Breite* sind die Skalentheile des pag. 380 erwähnten Glasmikrometers von denen 41,7 auf 1 par Linie, 18,5 auf 1^{mm} gehen.

Gewichte: 1 14,786 Gr. (Verhältniß ders. 1

1' 24,286 „ : 1,6764

2 29,400 „ : 1,9885

2' 39,400 „ : 2,6918)

für jedes Stäbchen und jede Belastung sind, wie bereits erwähnt, 12 Beobachtungen gemacht, indem der auf der einen Breitseite liegende Punkt der Reihe nach rechts oben, l. o., l. u., r. u. zu liegen kam und in jeder Lage dreimal beobachtet ward, wie das nachstehende Beispiel zeigt.

Längsrichtung + 67½°

Länge 20^{mm} par. (45,2^{mm}); Breite 75 (4,06^{mm});

Dicke 456 (⁴⁵⁶/₈₁₅ mm).

Gew.	P. r. o.*)			P. l. o.			P. l. u.			P. r. u.		
	S.											
1.	37.	36.	36.	37.	36.	36.	35.	37.	37.	35.	37.	37.
1'.	53.	53.	53.	52.	52.	52.	52.	53.	54.	52.	53.	53.
2.	60.	60.	60.	59.	60.	59.	60.	60.	59.	60.	60.	60.
2'.	77.	77.	78.	76.	77.	76.	76.	77.	77.	76.	78.	77.

Im Folgenden sind jedoch der Kürze halber aus den jedesmaligen 3 zusammengehörigen Werthen die Durchschnitte angegeben. Aus diesen wieder die arithmetischen Mittel, sind in Colonne m verzeichnet, genau bis auf halbe Skalentheile. In der nächsten stehen die Verhältnisse der im Mittel beobachteten Senkungen. Endlich enthalten die letzten Columnen die auf *andere Dimensionen reducirten* Werthe der Senkungen unter *vorläufiger* Anwendung der Formel $s = \frac{l^3}{b d^3} s_1$. Und zwar ist erst jedesmal reducirt

*) „Punkt rechts oben.“

auf die Dicke des (daneben aufgeführten) Stäbchens derselben Richtung (Breite constant). Sodann durchweg auf dieselbe Breite β und Dicke δ . Gewählt wurde dazu das Mittel aller vorkommenden: Breite β 76 ($4,10^{\text{mm}}$); Dicke δ 514 Sk.-Thle. ($\frac{914}{813}$). Schliesslich sind die Werthe der zweiten Gruppe (Länge 20") auf die erste Länge 16" reducirt worden durch Multiplikation mit $(\frac{16}{20})^2$ d. i. 0,51.

Stäbchen derselben Längsrichtung
mit *verschieden stehenden Seitenflächen.*

+ 45°

Breitseite parallel dem Hauptschnitt.

Länge 16,25" par.; Breite 4,1^{mm}; Dicke 716 ($\frac{716}{813}$).

G.	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.
	s.				
4*)	17	17 $\frac{1}{2}$	18	18 $\frac{1}{2}$	18
5.	22 $\frac{1}{2}$	23	22 $\frac{1}{2}$	23 $\frac{1}{2}$	23
6.	27 $\frac{1}{2}$	26 $\frac{1}{2}$	26 $\frac{1}{2}$	27 $\frac{1}{2}$	27

Stäbchen derselben Längsrichtung
mit *verschieden stehenden Seitenflächen.*

+ 45°

Schmalseite parallel dem Hauptschnitt.

Länge 16" 25 par.; Breite 4,1^{mm}; Dicke 712 ($\frac{712}{813}$).

G.	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.
	s.				
4	18 $\frac{1}{2}$	19	17 $\frac{1}{2}$	19	18,5
5	23 $\frac{1}{2}$	22 $\frac{1}{2}$	23 $\frac{1}{2}$	23 $\frac{1}{2}$	23
6	28	26 $\frac{1}{2}$	27 $\frac{1}{2}$	28 $\frac{1}{2}$	27,5

*) Diese Gewichte waren ein 4-Lothstück, 5-Lothstück, 6-Lothstück
altes preufs. Gewicht.

Stäbchen mit Schmalseite im Hauptschnitt.

Länge 16^m par. (36,2^{mm}).

0° (Hauptaxe.)

Stäbchen No. 1.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke $\frac{117}{815}$.

G.	P. r. o.			L. u.			r. u.			m.			auf D. No. 2			reducirt auf $\beta\delta$		

s.

1	28	27 $\frac{1}{2}$	28	28 $\frac{1}{2}$	28	1	24,9	30,6										
2	47 $\frac{1}{2}$	46 $\frac{1}{2}$	47 $\frac{1}{2}$	47 $\frac{1}{2}$	47	1,7	41,8	51,3										
2'	62 $\frac{1}{2}$	62	61 $\frac{1}{2}$	63	62	2,2	55,1	67,7										

Stäbchen No. 2.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 548 ($\frac{548}{815}$ mm).

G.	P. r. o.			L. u.			r. u.			m.			reducirt auf $\beta\delta$		

s.

1	26	25 $\frac{1}{2}$	26 $\frac{1}{2}$	27	26	1									
2	44 $\frac{1}{2}$	44 $\frac{1}{2}$	43 $\frac{1}{2}$	44	44	1,7									
2'	57	57	57	57	57	2,2									

+ 22 $\frac{1}{2}$ °.

Stäbchen No. 3.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 552 ($\frac{552}{815}$ mm).

G.	P. r. o.			L. u.			r. u.			m.			reducirt auf $\beta\delta$		

s.

1	22 $\frac{1}{2}$	23	22 $\frac{1}{2}$	22 $\frac{1}{2}$	23	1		23,8							
2	37	38	38 $\frac{1}{2}$	38	38	1,7		47,7							
2'	47 $\frac{1}{2}$	49 $\frac{1}{2}$	49 $\frac{1}{2}$	49 $\frac{1}{2}$	49	2,1		61,4							

Stäbchen No. 4.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 538 ($\frac{538}{815}$ mm).

G.	P. r. o.			L. u.			r. u.			m.			reducirt auf D. No. 3		

s.

1	25	25	24 $\frac{1}{2}$	25 $\frac{1}{2}$	25	1		23,2							
2	41 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	42	1,7		38,9							
2'	53 $\frac{1}{2}$	53 $\frac{1}{2}$	53 $\frac{1}{2}$	56	55	2,2		50,9							

+ 45°.

Stäbchen No. 5.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 592 ($\frac{492}{31\frac{1}{2}}$ mm).

G.	P. r. o.			l. o.			l. u.			r. u.			m.			reducirt auf $\beta \delta$		
	s.			s.			s.			s.			s.			s.		
1	131	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	20,0		
2	211	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	34,0		
2'	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	42,0		

Stäbchen No. 6.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 561 ($\frac{461}{31\frac{1}{2}}$ mm).

G.	P. r. o.			l. o.			l. u.			r. u.			m.			reducirt auf $\beta \delta$		
	s.			s.			s.			s.			s.			s.		
1	151	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	12,8		20,0
2	25	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	21,3		33,0
2'	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	27,2		42,0

+ 67½° (Kante 63° 44').

Stäbchen No. 7.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 563 ($\frac{463}{31\frac{1}{2}}$ mm).

G.	P. r. o.			l. o.			l. u.			r. u.			m.			reducirt auf $\beta \delta$		
	s.			s.			s.			s.			s.			s.		
1	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	9,5		14,5
2	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	16,0		23,5
2'	23	22	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	19,5		28,5

Stäbchen No. 8.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 586 ($\frac{486}{31\frac{1}{2}}$ mm).

G.	P. r. o.			l. o.			l. u.			r. u.			m.			reducirt auf $\beta \delta$		
	s.			s.			s.			s.			s.			s.		
1	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	1		13,0
2	16	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	1,8		23,5
2'	19	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	2,1		28,0

+ 90° (senkrecht zur Hauptaxe).

Stäbchen No. 9.*)

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 452 ($\frac{452}{811}$ mm).

Stäbchen No. 10.

Breite 75,5 (4,08^{mm}); Dicke 455 ($\frac{455}{813}$ mm).

G.	s.					reducirt auf β δ	
	P.r.o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.		
1	28	27	27	27½	27	1	18,5
2	47½	48	47	47½	48	: 1,8	33,0
2'	60	60½	60	61	60	: 2,2	41,5
1'	41½	41	40½	42½	41	: 1,5	28,0

— 67½°.

Stäbchen No. 11.

Breite 76,5 (4,13^{mm}); Dicke 493 ($\frac{493}{813}$ mm).

Stäbchen No. 12.

Breite 76,5 (4,13^{mm}); Dicke 501 ($\frac{501}{813}$ mm).

G.	s.					reducirt auf No. 11 auf β δ	
	P.r.o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.		
1	36½	36½	36½	34½	36	1	31,5
1	63½	62½	63½	62½	63	: 1,8	56,0
2'	80	81	80½	79	80	: 2,2	71,0

G.	s.					reducirt auf β δ	
	P.r.o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.		
1	33½	34½	35	34½	34	1	31,5
2	58½	59	59	58½	59	: 1,7	55,0
2'	73½	75	74	74	74	: 2,2	70,0
1'	49½	50	50½	50½	50	: 1,5	46,5

*) zerbrach gleich bei Beginn dieses Versuchs durch eine kleine Unvorsichtigkeit; zuvor waren mit ihm die Biegungen bei 19° par. Länge bestimmt worden, siehe pag. 380.

— 45° (Rhombusdiagonale).

Stäbchen No. 12

Länge 20" par. (45,2^{mm}).
0° (Hauptaxe).

Stäbchen No. 1 a.*

Länge 17"; Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 527 ($\frac{117}{813}$ mm).

G.	P. r. o.			l. u.	r. u.			m.	reducirt			auf β δ	auf L. 16'''	s.	P. r. o.			l. u.	r. u.			m.	reducirt			auf β δ	auf L. 16'''	s.		
	auf D. No. 2 a.				auf β δ					auf L. 16'''					auf β δ					auf L. 16'''										
1	33 $\frac{1}{2}$	32 $\frac{1}{2}$	(35 $\frac{1}{2}$)	34	33	1	36,0	(59,5)	30,5	1	51	51	50	50 $\frac{1}{2}$	51	1	61,0	31,0	+ 22 $\frac{1}{2}$ °.	61,0	31,0	reducirt	auf β δ	auf L. 16'''	+ 22 $\frac{1}{2}$ °.	61,0	31,0	reducirt	auf β δ	auf L. 16'''
1'	51	49 $\frac{1}{2}$	(54 $\frac{1}{2}$)	50 $\frac{1}{2}$	50,5	: 1,5	55,0	(91,0)	46,5	1'	72 $\frac{1}{2}$	74 $\frac{1}{2}$	74 $\frac{1}{2}$	74 $\frac{1}{2}$	74	: 1,5	88,5	45,0		88,5	45,0		auf β δ	auf L. 16'''		88,5	45,0		auf β δ	auf L. 16'''
2	56	56 $\frac{1}{2}$	(63)	57 $\frac{1}{2}$	57	: 1,7	62,0	(102,5)	52,0	2	(93 $\frac{1}{2}$)	86 $\frac{1}{2}$	85 $\frac{1}{2}$	87	86,5	: 1,7	103,5	53,0		103,5	53,0		auf β δ	auf L. 16'''		103,5	53,0		auf β δ	auf L. 16'''
2'	72 $\frac{1}{2}$	73 $\frac{1}{2}$	(78)	73	73	: 2,2	79,5	(131,5)	67,0	2'	109	108 $\frac{1}{2}$	110 $\frac{1}{2}$	109 $\frac{1}{2}$	109,5	: 2,2	131,0	67,0		131,0	67,0		auf β δ	auf L. 16'''		131,0	67,0		auf β δ	auf L. 16'''

Stäbchen No. 2 a.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 548 ($\frac{149}{813}$ mm).

G.	P. r. o.			l. u.	r. u.			m.	reducirt			auf β δ	auf L. 16'''	s.	P. r. o.			l. u.	r. u.			m.	reducirt			auf β δ	auf L. 16'''	s.		
	auf D. No. 2 a.				auf β δ					auf L. 16'''					auf β δ					auf L. 16'''										
1	33 $\frac{1}{2}$	32 $\frac{1}{2}$	(35 $\frac{1}{2}$)	34	33	1	36,0	(59,5)	30,5	1	51	51	50	50 $\frac{1}{2}$	51	1	61,0	31,0	+ 22 $\frac{1}{2}$ °.	61,0	31,0	reducirt	auf β δ	auf L. 16'''	+ 22 $\frac{1}{2}$ °.	61,0	31,0	reducirt	auf β δ	auf L. 16'''
1'	51	49 $\frac{1}{2}$	(54 $\frac{1}{2}$)	50 $\frac{1}{2}$	50,5	: 1,5	55,0	(91,0)	46,5	1'	72 $\frac{1}{2}$	74 $\frac{1}{2}$	74 $\frac{1}{2}$	74 $\frac{1}{2}$	74	: 1,5	88,5	45,0		88,5	45,0		auf β δ	auf L. 16'''		88,5	45,0		auf β δ	auf L. 16'''
2	56	56 $\frac{1}{2}$	(63)	57 $\frac{1}{2}$	57	: 1,7	62,0	(102,5)	52,0	2	(93 $\frac{1}{2}$)	86 $\frac{1}{2}$	85 $\frac{1}{2}$	87	86,5	: 1,7	103,5	53,0		103,5	53,0		auf β δ	auf L. 16'''		103,5	53,0		auf β δ	auf L. 16'''
2'	72 $\frac{1}{2}$	73 $\frac{1}{2}$	(78)	73	73	: 2,2	79,5	(131,5)	67,0	2'	109	108 $\frac{1}{2}$	110 $\frac{1}{2}$	109 $\frac{1}{2}$	109,5	: 2,2	131,0	67,0		131,0	67,0		auf β δ	auf L. 16'''		131,0	67,0		auf β δ	auf L. 16'''

Stäbchen No. 3 a.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 552 ($\frac{142}{813}$ mm).

G	P.r.o.			l. u.	r. u.	m.	reducirt auf β δ		auf L. 16'''	G.	P.r.o.			l. o.	l. u.	r. u.	m.	auf D. No. 3 a.		reducirt auf β δ		auf L. 16'''
	auf D. No. 3 a.						auf β δ				auf D. No. 3 a.							auf β δ				
1	44	45	44	44	44	44	1	55,0	28,0	1	48 $\frac{1}{2}$	50	48 $\frac{1}{2}$	50	49	1	45,5	55,5	28,5	55,5	28,5	
1'	64	65 $\frac{1}{2}$	65 $\frac{1}{2}$	64 $\frac{1}{2}$	65	65	: 1,5	81,5	41,5	1'	71	durch Unvor-	71	: 1,5	66,0	80,5	41,0	80,5	41,0	80,5	41,0	
2	75 $\frac{1}{2}$	76 $\frac{1}{2}$	75 $\frac{1}{2}$	76	76	76	: 1,7	95,5	48,5	2	83 $\frac{1}{2}$	sichtigkeit zer-	83	: 1,7	77,0	94,0	48,0	94,0	48,0	94,0	48,0	
2'	95	96 $\frac{1}{2}$	96	96 $\frac{1}{2}$	96	96	: 2,2	120,0	61,0	2	106 $\frac{1}{2}$	brochen.	107	: 2,2	99,0	121,0	61,5	121,0	61,5	121,0	61,5	

Stäbchen No. 4 a.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 538 ($\frac{138}{813}$ mm).

G	P.r.o.			l. u.	r. u.			m.	reducirt auf β δ			G.	P.r.o.			l. o.	l. u.			r. u.	m.	auf D. No. 3 a.			reducirt auf β δ L. 16 ^m	
	auf L. 16 ^m				auf β δ				auf L. 16 ^m				auf β δ				auf L. 16 ^m					auf β δ				
1	44	45	44	44	44	44	1	55,0	28,0	1	48 $\frac{1}{2}$	50	48 $\frac{1}{2}$	50	49	1	45,5	55,5	28,5							
1'	64	65 $\frac{1}{2}$	65 $\frac{1}{2}$	64 $\frac{1}{2}$	65	65	: 1,5	81,5	41,5	1'	71	durch Unvor-	71	: 1,5	66,0	80,5	41,0	80,5	41,0							
2	75 $\frac{1}{2}$	76 $\frac{1}{2}$	75 $\frac{1}{2}$	76	76	76	: 1,7	95,5	48,5	2	83 $\frac{1}{2}$	sichtigkeit zer-	83	: 1,7	77,0	94,0	48,0	94,0	48,0							
2'	95	96 $\frac{1}{2}$	96	96 $\frac{1}{2}$	96	96	: 2,2	120,0	61,0	2'	106 $\frac{1}{2}$	brochen.	107	: 2,2	99,0	121,0	61,5	121,0	61,5							

*) Das Stäbchen No. 1 oder 1a. war für 20" zu kurz, konnte nur bei 17" beobachtet werden. Die dabei gefundenen Biegungen sind reducirt auf L = 20", es sind die in Colonne β δ stehenden eingeklammerten Werthe. Die übrigen Reductionen auf D. No. 2a. wurden unterlassen. Die in Colonne l. u. eingeklammerten Beobachtungen verdanken ihre Größe jedenfalls einer nicht gefundenen kleinen Störung.

+ 45°.

Stäbchen No. 5 a.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 592 ($\frac{342}{313}$ ^{mm}).

G.	P.r.o.			l. u.	r. u.	m.	s.	reducirt auf β δ			auf L. 16'''	G.	P.r.o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.	auf D. No. 5 a.	reducirt auf β δ		auf L. 16'''
	G.							L. 16'''											auf β δ		
1	23 $\frac{1}{2}$	25	24 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{1}{2}$	24,5	1	38,0	19,5	1	30	29	29 $\frac{1}{2}$	29 $\frac{1}{2}$	29,5	1	25,0	39,0	39,0	20,0	
1'	37	37	36 $\frac{1}{2}$	36 $\frac{1}{2}$	37	37	1,5	57,0	29,0	1'	41 $\frac{1}{2}$	40 $\frac{1}{2}$	41	41	41	1,4	35,0	54,0	54,0	27,5	
2	40 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	41 $\frac{1}{2}$	41	41	1,7	63,5	32,5	2	46 $\frac{1}{2}$	46	47 $\frac{1}{2}$	46 $\frac{1}{2}$	47	1,6	40,0	62,0	62,0	31,5	
2'	51 $\frac{1}{2}$	52 $\frac{1}{2}$	51 $\frac{1}{2}$	51 $\frac{1}{2}$	52	52	2,1	80,5	41,0	2'	59 $\frac{1}{2}$	58 $\frac{1}{2}$	60	61	60	2,0	51,0	79,0	79,0	40,5	

Stäbchen No. 6 a.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 561 ($\frac{281}{213}$ ^{mm}).+ 67 $\frac{1}{2}$ ° (Kante 63° 44').

Stäbchen No. 7 a.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 563 ($\frac{342}{313}$ ^{mm}).

G.	P. r. o.			l. u.	r. u.	m.	s.	reducirt			P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.	s.	reducirt			P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.	s.	reducirt			auf L. 16'''
	G.							auf D. No. 8 a.									auf β δ L. 16'''									auf β δ L. 16'''			
1	18 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{1}{2}$	18,5	1	16,5	1	16,5	1	15 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{1}{2}$	16 $\frac{1}{2}$	16	1	23,5	33,5	33,5	33,5	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5	11,5
1'	26 $\frac{1}{2}$	26 $\frac{1}{2}$	26 $\frac{1}{2}$	26 $\frac{1}{2}$	27	27	1,4	24 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{1}{2}$	24 $\frac{1}{2}$	24,5	1,6	36,0	46,0	46,0	46,0	18,5	18,5	18,5	18,5	18,5	18,5	18,5	18,5	18,5
2	30	30 $\frac{1}{2}$	30	31	30	30	1,4	26,5	26,5	26,5	28 $\frac{1}{2}$	28 $\frac{1}{2}$	28 $\frac{1}{2}$	27 $\frac{1}{2}$	28	1,8	41,0	51,0	51,0	51,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0
2'	38 $\frac{1}{2}$	39	39 $\frac{1}{2}$	39 $\frac{1}{2}$	39	39	1,7	34,5	34,5	34,5	36	36	34 $\frac{1}{2}$	35 $\frac{1}{2}$	35	2,2	51,0	61,0	61,0	61,0	26,0	26,0	26,0	26,0	26,0	26,0	26,0	26,0	26,0

Stäbchen No. 8 a.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 586 ($\frac{342}{213}$ ^{mm}).

— 45° (Rhombusdiagonale).

Stäbchen No. 13a.

Breite 77 (4,17^{mm}); Dicke 431 ($\frac{431}{315}$).

G.	auf D. No. 14 a.					reducirt auf β δ					auf L. 16''						
	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.	reducirt auf β δ	auf L. 16''
1	114 $\frac{1}{2}$	415 $\frac{1}{2}$	116	115 $\frac{1}{2}$	115	1	103,0	68,5	35,0	1	102 $\frac{1}{2}$	103 $\frac{1}{2}$	102 $\frac{1}{2}$	103	1	69,0	35,5
1'	167	170	169 $\frac{1}{2}$	169	169	1,5	151,5	101,0	51,5	1'	150	150 $\frac{1}{2}$	151 $\frac{1}{2}$	151	1,5	101,5	51,5
2	192 $\frac{1}{2}$	195 $\frac{1}{2}$	195 $\frac{1}{2}$	195 $\frac{1}{2}$	195	1,7	175,0	116,5	59,5	2	172 $\frac{1}{2}$	172	172 $\frac{1}{2}$	174 $\frac{1}{2}$	1,7	116,0	59,0
2'	(240 $\frac{1}{2}$)	(242)	(245 $\frac{1}{2}$)	(248)	244 $\frac{1}{2}$	(2,1)	(219,0)	(145,5)	(74,5)	2'	221 $\frac{1}{2}$	222	222 $\frac{1}{2}$	222	2,2	149,0	76,0

Stäbchen No. 14a.

Breite 77,5 (4,19^{mm}); Dicke 447 ($\frac{447}{315}$).

— 22 $\frac{1}{2}$ °.

Stäbchen No. 15a.**

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 466 ($\frac{466}{315}$).

G.	S.					S.				
	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.	P. r. o.	l. o.	l. u.	r. u.	m.
1	83	84	84	83	84	1	58	57	58	58
1'	128	121	124	123	123	1	88	88	88	88
2	144	141	142	142	142,5	2	101	100	100	101
2'	zerbrochen	176	176	176	176	2	126	127	127	127,5

Stäbchen No. 16a.

Breite 75 (4,06^{mm}); Dicke 522 ($\frac{522}{315}$).

*) Ist wohl zu gering, doch konnte der Grund der Störung nicht ermittelt werden.

**) Siehe die Anmerkung bei Stäbchen 15 pag. 387.

VI.

Folgerungen.

Der Betrag der Senkung in der Mitte der gebogenen Stäbchen ist eine Function von mancherlei Argumenten; die beobachteten Werthe nun gestatten Schlüsse auf die Natur dieser Function. Und zwar soll die Senkung der Reihe nach in ihrer

Abhängigkeit von der Stellung der Seitenflächen,
von den Dimensionen, der Dicke und Breite,
der Länge,
von den Richtungen,
von dem Gewicht

betrachtet werden.

Abhängigkeit von der Stellung der Seitenflächen. Was die *erste* Abhängigkeit, die *von der Stellung der Seitenflächen* anlangt, so hatte schon die Eingangs erwähnte Umlegung eines quadratischen Stäbchens *vermuthen* lassen, daß eine solche nicht stattfindet. Die erste der vorstehenden Tabellen nun giebt die Beobachtungen an zwei Stäbchen von derselben Richtung und fast denselben Dimensionen, deren Breitseiten die abweichendsten möglichen Stellungen haben. Aus diesen geht vielleicht zur Genüge hervor:

1. die Biegung eines Stäbchens ist unabhängig von der Stellung der Seitenfläche.

Abhängigkeit von den Dimensionen der Dicke und Breite. In Betreff sodann der *Dimensionen* ist zu untersuchen, in wie weit die Formel für unkrystallinische Medien

$$s = \frac{l^3}{b d^3} s_1$$

auch hier ihre Gültigkeit behält.

Mit der Dicke ist die beim Biegen verticale, dem Zuge der Gewichte parallele, *hier* kleinste Dimension gemeint, während die Breite in der obern oder untern Fläche liegt.

Zuerst liefs sich an sämmtlichen Paaren von Stäbchen gleicher Richtung, gleicher Länge, (fast) gleicher Breite darthun, daß für die *Dicke* das Gesetz — immer selbstverständlich gemeint: innerhalb der Genauigkeitsgrenzen — auch hier bei dem krystallinischen Material *dasselbe* bleibt: vergleiche die auf Grund dieses Gesetzes berechneten ersten Reductions-Colonnen.

Für die *Breiten* konnten zwar, wegen der nur sehr geringen Unterschiede *separate*, entscheidende Reductionen nicht vorgenommen werden, sondern immer nur solche gleichzeitig mit denen für die andern Dimensionen, indess ist eine Abweichung von jenem Gesetze gerade für sie in keiner Weise wahrscheinlich.

Hiernach müßte es also als erlaubt angesehen werden, alle die verschiedenen wirklichen Breiten und Dicken auf eine und dieselbe angenommene mittlere β und δ zu reduciren, — zweite Reductionscolonne; so daß nur noch die Abhängigkeit von der Länge, die von den Richtungen und den Gewichten übrig blieb.

Abhängigkeit von der Länge. Auch hinsichtlich der *Längen* findet das Gesetz für unkrystallinische Stäbe sich hier ebenfalls ausreichend bestätigt — wie in der Gruppe für Länge 20^m, nach bereits erfolgter Reduction wegen Breite und Dicke, die *dritte* Reductions-Colonne ausweist.

Somit ergiebt sich im Ganzen:

2. Die Biegung hängt — innerhalb der Genauigkeitsgrenzen — von den Dimensionen in der nämlichen Weise ab, wie bei unkrystallinischen Medien: sie ist wie dort

direct proportional dem Cubus der Länge,
indirect proportional der Breite,
indirect proportional dem Cubus der Dicke.

Abhängigkeit von den Richtungen. Von besonderer Wichtigkeit ist nunmehr, wie die Biegung mit den Richtungen der Längsaxe im Hauptschnitt sich ändert.

Diese Abhängigkeit wird veranschaulicht durch die Curven auf der angehängten Figurentafel. Den Biegungen, sämmtlich umgerechnet für die *eine* angenommene Breite und Dicke, proportional sind von einem Punkt aus in den betrachteten Richtungen Radiivectores aufgetragen.

Die rechte Gruppe von 3 Curven entspricht der Länge 16''' bei dreierlei Belastung, die 4 gestrichelten Curven links ergeben sich für die andere Länge von 20''' bei 4 verschiedenen Belastungen, während die punktirten Curven der Reduction auf die Länge 16''' entspringen.

Muß nun auch eine vollständige Discussion dieses Curvensystems ausgesetzt werden, bis eine Gleichung für dasselbe auf theoretischem Wege aufgefunden ist, so lassen sich doch bereits eine Reihe sehr bemerkenswerther Eigenschaften an ihm erkennen.

Dafs die Curven parallelläufig sind, d. h. nach jeder Richtung einen *Diameter* besitzen, der halbirt wird und in congruente Hälften theilt, folgt mit Nothwendigkeit daraus, dafs hier eine Richtung von ihrer entgegengesetzten physikalisch nicht unterschieden ist.

Vor Allem fällt in die Augen, zuwider dem, was auf Grund optischer und thermischer Thatsachen sich hätte vermuthen lassen können:

3. Es existirt keine Symmetrie gegen die Hauptaxe.

Vielmehr zeichnen sich die im Krystalle ausgezeichneten Richtungen rechts- und linksum von der Hauptaxe auch in der Biegungscurve aus:

4. bei Stäbchen nach Richtungen der Kante findet Minimum der Biegung

und

5. bei solchen nach Richtung der kurzen Rhombusdiagonale Maximum der Biegung statt.

Eine der merkwürdigsten auftretenden Erscheinungen ist aber wohl die folgende.

Legt man um die Curve ein Parallelogramm, das Diagonalschnitt einer rhomboedrigen Grundform ist, und von der Gröfse, dafs die beiden Langseiten (die Rhombus-

diagonalen) die Curve tangiren, so *tangirt* (dem Anscheine nach) *auch das andere Seitenpaar* (die Kanten).

Es war von Interesse die Eigenschaften der Biegungscurve im Hauptschnitt als Eigenschaften einer Biegungsoberfläche auszusprechen, und es galt diese nach Möglichkeit zu construiren.

Da alle Werthe im Hauptschnitt durch *eine* Kante für jede der 3 oberen und der 3 unteren Kanten sich wiederholen müssen, so hatte ich schon 6 verschiedene Constructionsebenen, die ich zusammensetzen konnte. In der oberen wie in der unteren Hälfte wechseln Aus- und Einbiegungen unter einander ab. Ueberlegte ich nun ferner, daß in einem Hauptschnitt normal zum jetzigen (ein Hauptschnitt II., dessen Untersuchung noch bevorsteht) Symmetrie zur Hauptaxe statthaben, und daß er den Uebergang von einer Aus- zu einer Einbuchtung vermitteln muß; und schaltete ich demgemäß passende symmetrische Ovale ein: so hatte ich bereits ein leidlich vollständiges Bild der Biegungsoberfläche fertig.

Wenn nun im Hauptschnitt Kante sowohl, als Rhombendiagonale tangiren, so wird die Oberfläche in Punkten zweier Kanten und einer Rhombendiagonale von einer *Seitenfläche* tangirt.

Dann aber ist es in hohem Grade wahrscheinlich, daß diese auch die zwischenliegenden Schnitte berühre; kurz:

6. es scheint, daß die Biegungsoberfläche von allen Flächen einer rhomboedriscen Grundform längs einer Curve tangirt werde.

Was die Krümmung anlangt, so hat es weiterhin den Anschein, als ob die Hauptaxenrichtung auf der Curve, bezüglich der Oberfläche normal stehe, es also Hornpunkte nicht gebe.

Abhängigkeit von den Gewichten. Zum Schlusse ist noch zu untersuchen, wie bei derselben Längsrichtung, denselben Dimensionen, die Größe der Biegungen

mit den *Gewichten* sich ändert. Und hier gelangt man nun zu einem jedenfalls ganz unerwarteten Resultate.

Das Erste, was beim Betrachten der für die verschiedenen Belastungen enthaltenen Curven in die Augen fällt, war nicht anders zu vermuthen: Die Curven sind *ähnlich*, das will besagen: die Abhängigkeit der Biegungen von den Gewichten ist nach allen Richtungen hin dieselbe, nicht nach anderer Richtung hin eine andere.

Nun aber zeigt sich zweitens, daß diese Abhängigkeit die folgende ist:

Verhältni- nisse der Gewichte.	Verhältnisse der zugehörigen Biegungen.
1	1 d. i. 1
: 1,68	: 1,5 d. i. $1,68 \cdot 0,90$ oder $1,68 - 1,50 = 0,18$
: 1,99	: 1,7 d. i. $1,99 \cdot 0,86$ oder $1,99 - 1,7 = 0,29$
: 2,69	: 2,2 d. i. $2,69 \cdot 0,82$ oder $2,69 - 2,2 = 0,49$

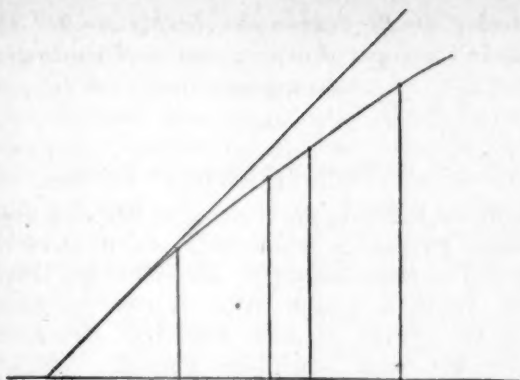
Dieses findet sich mit einer Uebereinstimmung, die Zweifel ausschließt und findet sich noch lange vor der Nähe der Elasticitätsgrenze, d. h. also:

7. die Biegungen sind nicht proportional den Gewichten.

Vielmehr nur einem Bruchtheile derselben und zwar *einem um so kleineren, je größer das Gewicht*; oder:

8. die Zunahme der Biegungen wird geringer bei größerem Gewicht, und dieses schon in reichlicher Entfernung an der Elasticitätsgrenze.

Trägt man die Gewichte als Abscissen, die Biegungen als Ordinaten auf, so steigt die Curve nicht ganz geradenlinig, sondern folgendermaßen an:



Das gefundene negative Resultat muß allerdings elasticitätstheoretischen Betrachtungen gegenüber in hohem Grade befremden. Zu seiner Erklärung scheint etwas anderes kaum übrig zu bleiben, als daß die linearen Differentialgleichungen der Elasticität hier im Krystall ihre Gültigkeit verlieren.

Um indeß für positive Aufschlüsse hierüber einen Anhalt zu gewinnen, wird es vor Allem weiterer Beobachtungen mit noch anderen Gewichten bedürfen.

Die Resultate der Untersuchung des zweiten Hauptschnitts, und einer zur Axe normalen Ebene, die ich in nächster Zeit abzuschließen gedenke, sowie Untersuchungen über elastische Nachwirkung beim Kalkspath werde ich in einer zweiten Abhandlung folgen lassen. Es werden sich daran einige theoretische Betrachtungen anschließen.

Nachtrag: Hr. Geh. R. Neumann hat in neuester Zeit eine ganz allgemeine Theorie der Elasticitätsverhältnisse krystallinischer Körper entwickelt, die nur auf der Annahme fußt, daß den äußeren Symmetrieverhältnissen der Krystalle die gleichen im Innern entsprechen. Die obigen experimentellen Daten stimmen mit ihren Ergebnissen völlig überein.

II. Ueber die Reflexion des Lichts an der Oberfläche isotroper Körper; von G. Lundquist.

(Fortsetzung von S. 200.)

II. Die Theorien der Reflexion an Metallen.

Die durch Reflexion des Lichtes an Metallen erzeugte elliptische Polarisation wurde 1815 von Brewster entdeckt und sorgfältig studirt¹⁾. Die zahlreichen Besonderheiten, welche er kennen lehrte, wurden von E. Neumann auf gewisse einfache Principien zurückgeführt; derselbe gab auch empirische Formeln, welche die Beobachtungen mit hinreichender Genauigkeit ausdrückten²⁾. Versuche zur Aufstellung einer mathematischen Theorie der Metall-Reflexion wurden gemacht von Mac Cullagh, von Cauchy und von O'Brien.

Mac Cullagh gab seine Formeln hauptsächlich gestützt auf die Induction und die Analogie, welche die Metallreflexion mit der totalen Reflexion darbietet³⁾. Er ersetzte in den Fresnel'schen Formeln den Brechungsindex d. h. das Verhältniß der Sinusse des Einfallswinkels und des Brechungswinkels durch die complexe GröÙe ce^{γ} , worin c und γ Constanten sind, und ebenso das Verhältniß ihrer Cosinusse durch eine andere complexe, aber variable GröÙe. Auf diese Weise erhielt er Formeln, die übereinstimmen mit denen von Cauchy, welche wir weiterhin geben werden. Nach seiner Muthmaßung wird der Brechungsindex der Metalle vorgestellt durch $\frac{c}{\cos \gamma}$.

Bei seinen Berechnungen ward Mac Cullagh geleitet durch gewisse theoretische Ideen, die er indess nur theilweise bekannt gemacht hat.

- 1) *Phil. Transact.* 1830 p. 287. — *Biot, Traité de phys. Paris*, 1816, IV. p. 579.
- 2) *Pogg. Ann.* 1832, XXVI. p. 89; 1837, XL. p. 513.
- 3) *Proceed. of the Irish Acad.* 1836—37, I. p. 2. — *Irish Acad.* 1837, XVIII. pt. I. p. 70. — *Compt. rend.* 1839, VIII. p. 961.

Cauchy seinerseits hat gesucht die Erscheinungen der Metall-Reflexion zurückzuführen auf eine Theorie, die hervorgeht aus einer Verallgemeinerung derjenigen, die er für die durchsichtigen Körper gab. Zwar hat er den Beweis seiner Formeln nie gegeben, hat aber die Principien derselben kennen gelehrt, und das genügt, um seine Resultate wieder zu finden. Beer hat zuerst einen Beweis gegeben¹⁾; aber seine Methode hat den Mangel, daß sie die Anzahl der eingeführten Hypothesen größer erscheinen läßt, als sie wirklich ist. Gegen die im Allgemeinen sehr genügende Demonstration von Eisenlohr²⁾ könnte man andererseits den Einwurf erheben, daß sie nicht die Nothwendigkeit einer neuen Hypothese erwiesen hat, um zu den Resultaten Cauchy's zu gelangen.

Wir wollen nun seine Formeln durch eine andere Methode auseinandersetzen. Die Bezeichnungen sind dieselben wie vorhin.

Wenn das zweite Mittel nicht vollkommen durchsichtig ist, so hat die Erfahrung gelehrt, sind die Projectionen der gebrochenen Schwingung von der Form:

$$P'e - U'x \cos(u'x + vy - st + \omega'),$$

und werden demgemäß repräsentirt durch die reellen Theile der Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= A'e - U'x + i(u'x + vy - st) \\ \eta' &= B'e - U'x + i(u'x + vy - st) \\ \zeta' &= C'e - U'x + i(u'x + vy - st) \end{aligned} \right\} \quad . \quad (50)$$

Man kennt nicht die Relationen, welche die in diese Ausdrücke eintretenden Constanten erfüllen müssen, allein es ist wenigstens sehr wahrscheinlich, daß auch in den nicht durchsichtigen Mitteln die Lichtschwingungen sich fortpflanzen ohne Compressionen oder Dilatationen zu erzeugen, d. h. daß die Gleichung

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

1) Pogg. Ann. XCII, p. 402.

2) Ib. CIV., p. 368.

durch die Projectionen der gebrochenen Schwingung verificirt seyn muß. Allein alsdann muß man dieser Gleichung auch durch die Ausdrücke (50) genügen können, wodurch man hat:

$$A' (u' + iU') + B'v = 0 \quad . \quad . \quad (51)$$

Bemerken wir nun, daß die Ausdrücke (50) und die Relation (51) aus den Ausdrücken (18) und der Relation (24^a) erhalten werden, wenn man in diesen u ersetzt durch $u' + iU'$, und daß folglich die neuen Bedingungen bezüglich der Oberfläche sich durch denselben Proceß aus denen herleiten lassen, welche wir für die durchsichtigen Körper aufgestellt haben, vorausgesetzt man nehme an, daß die Ausdrücke (35) für die longitudinale Schwingung nahezu dieselben bleiben. Dann ist leicht zu sehen, daß man die Werthe der Unbekannten für den gegenwärtigen Fall sehr einfach erhalten kann, wenn man (in den Formeln (32), (38) u. s. w.) die reelle GröÙe u' ersetzt durch die complexe $u' + iU'$. Sonach hat man:

$$C = C \frac{u - u' - iU'}{u + u' + iU'}, \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

$$B = B \frac{u - u' - iU'}{u + u' + iU'} \times \left. \begin{aligned} & \frac{uu' - v^2 - \kappa v U' + i [u U' + \kappa v (u + u')]}{uu' + v^2 + \kappa v U' + i [u U' + \kappa v (u - u')]} \end{aligned} \right\} (53)$$

Zerlegen wir nun die einfallende Schwingung in zwei, eine zur Einfallsebene senkrechte, und eine in dieser Ebene, und nehmen an, die Amplituden dieser Componenten seyen einander gleich und zur Einheit genommen. Seyen ferner die Amplituden der der reflectirten Schwingung entsprechenden Componenten repräsentirt durch J_1 und J^2 , und ihre Phasendifferenzen mit den Componenten der einfallenden Schwingung respective durch Δ_1 und Δ_2 ; dann hat man

$$C = 1; \quad B = \cos a; \quad C_1 = J_1 e^{i\Delta_1}; \quad B_1 = \cos a J_2 e^{i\Delta_2},$$

woraus:

$$C_1 = C J_1 e^{i\Delta_1}; \quad B_1 = B J_2 e^{i\Delta_2} \quad . \quad . \quad (54)$$

Bringt man diese Werthe in die Gleichungen (52) und (53), so erhält man:

$$J_1^2 = \frac{(u-u')^2 + U'^2}{(u+u')^2 + U'^2}, \dots (55)$$

und setzt man $U' = kp$, so ergibt sich, wenn man $u = v \cot \alpha$ und $u' = v \cot \alpha'$ substituirt

$$J_1^2 = \frac{\sin^2(\alpha - \alpha') + p^2 \sin^2 \alpha'}{\sin^2(\alpha + \alpha') + p^2 \sin^2 \alpha'}.$$

Auf dieselbe Weise kann man die Formeln für J_2^2 , A_1 und A_2 herleiten.¹⁾

Die so erhaltenen Formeln sind ganz allgemein und müssen die Gesetze der Reflexion an allen isotropen Mitteln enthalten; allein man muß bemerken, daß ihre Anwendung die Kenntniß der GröÙe p und des Brechungsindex erfordert, und dies führt zu Schwierigkeiten, wenn es sich um opake, besonders metallische Körper handelt, wo diese GröÙen mit dem Einfallswinkel variiren. Um in diesem Falle die Anwendung zu erleichtern, hat Cauchy zwischen diesen GröÙen, gestützt auf eine Art von Induction, eine Relation aufgestellt, mittelst welcher man den Formeln eine sehr bequeme Form geben kann.

Bemerken wir zuvörderst, daß die Gleichung (24c) nicht mehr anwendbar ist, wenn es sich um einen opaken Körper handelt; ersetzen wir nämlich in dieser Gleichung u durch $u' + iU'$, so kommt

$$k'^2 = (u' + iU')^2 + v^2,$$

woraus, wenn man erwägt, daß k'^2 vermöge der Gleichung (24b) nothwendig positiv ist, sich ergibt:

$$k'^2 = u'^2 - U'^2 + v^2 \text{ und } u'U' = 0.$$

Mithin muß man haben:

$$U' = 0 \text{ oder vielmehr } u' = 0.$$

1) Siehe Beer, Pogg. Ann. XCII. S. 408. Diese Deduction geschieht sehr einfach durch die von Eisenlohr (Pogg. Ann. CIV. S. 351) angezeigte Methode.

Poggendorff's Annal. Bd. CLII.

Der erste Fall entspricht der gewöhnlichen Reflexion an durchsichtigen Körpern, der zweite findet bei der totalen Reflexion statt; allein weder der eine noch der andere entspricht den Reflexionen an opaken Körpern.

Indefs läßt sich die nöthige Relation durch folgende Betrachtungen erhalten¹⁾. Für die durchsichtigen Körper hat man die Relation (12)

$$k^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

gefunden, oder

$$-k = (iu)^2 + (iv)^2 + (iw)^2,$$

worin die reelle und constante GröÙe k von Cauchy die Charakteristik genannt wird. Wenn dagegen der betrachtete Körper aufhört durchsichtig zu seyn, so müssen die GröÙen iu , iv , iw ersetzt werden durch $U + iu$, $V + iv$, $W + iw$, und die neue Charakteristik $k + iK$ ist, der Analogie nach, gegeben durch die Gleichung:

$$-(k + iK)^2 = (U + iu)^2 + (V + iv)^2 + (W + iw)^2 \dots (56)$$

Da nun die Charakteristik im vorhergehenden Falle constant ist, so ist sie es auch wahrscheinlich in diesem Fall. Nehmen wir also an, daß dem so sey, d. h. daß die GröÙen k und K constant seyen und die erstere positiv.

Es handelt sich nun darum, die Formeln (52) und (53) mittelst der Gleichung (56) zu transformiren. Im gegenwärtigen Fall erhält die Relation die Form

$$-(k' + iK')^2 = (-U' + iu')^2 + (iv')^2 \dots (57)$$

Setzen wir

$$k' + iK' = kce^{i\gamma} \dots (58)$$

worin c und γ zwei neue Constanten sind. Alsdann hat man für die normale Incidenz

$$\sqrt{\alpha} u' + iU' = u'_0 + iU'_0 = kce^{i\gamma} \dots (59)$$

1) *Compt. rend.* 1839, VIII. p. 43.

Für irgend eine Incidenz kann man setzen:

$$u' + iU' = kr e^{i\varrho}, \quad (60)$$

wo r und ϱ variable Größen sind. Vermöge der Gleichung (57) hat man also

$$c^2 e^{2i\gamma} = r^2 e^{2i\varrho} + \sin^2 \alpha . . . (61)$$

und folglich

$$\left. \begin{aligned} c^2 \sin 2\gamma &= r^2 \sin 2\varrho \\ c^2 \cos 2\gamma &= r^2 \cos 2\varrho + \sin^2 \alpha \end{aligned} \right\} . . (62)$$

woraus sich die Formeln

$$\left. \begin{aligned} r &= \left(\frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\varrho} \right)^{\frac{1}{2}} c \\ \cot (2\varrho - \gamma) &= \cot \gamma \cos \left[2 \operatorname{Arctang} \frac{\sin \alpha}{c} \right] \end{aligned} \right\} . . (63)$$

ergeben¹⁾, welche zur Bestimmung von r und ϱ dienen, sobald c und γ bekannt sind.

Was die Formeln (54) und (60) betrifft, so zieht man aus der Gleichung (52)

$$J_1 e^{iA_1} = \frac{u - kr e^{i\varrho}}{u + kr e^{i\varrho}} = \frac{\frac{\cos \alpha}{r} - e^{i\varrho}}{\frac{\cos \alpha}{r} + e^{i\varrho}}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\cot \Psi_1 = \cos \varrho \sin \left[2 \operatorname{Arctang} \frac{\cos \alpha}{r} \right], \quad . (64)$$

so ergibt sich daraus

$$J_1^2 = \tan \left(\Psi_1 - \frac{\pi}{4} \right) (65)$$

$$\tan A_1 = \sin \varrho \tan \left(2 \operatorname{Arctang} \frac{\cos \alpha}{r} \right)$$

- 1) Die Transformationen dieser Art bewerkstelligen sich sehr leicht, wenn man erwägt, daß man hat:

$$\tan \alpha = \frac{n \sin 2\beta}{1 - n \cos 2\beta}$$

und auch

$$\tan (\alpha + \beta) = \frac{1 + n}{1 - n} \tan \beta$$

Mittelst dieser Formeln berechnet man die Intensität J_1 und die Phasendifferenz A_1 des reflectirten Strahls, dessen Schwingungen winkelrecht zur Einfallsebene sind.

Zur Erlangung der entsprechenden Formeln für den Strahl, dessen Schwingungen in dieser Ebene liegen, kann man, bei erster Annäherung, die Gröfse α vernachlässigen, die, wenigstens bei durchsichtigen Körpern, immer sehr klein ist. Alsdann erhält man, bei Berücksichtigung der Formeln (54) und (60), aus der Gleichung (53)

$$J_2 e^{iA_2} = \frac{u - k r e^{i\varrho}}{u + k r e^{i\varrho}} \cdot \frac{u k r e^{i\varrho} - v^2}{u k r e^{i\varrho} + v^2}.$$

Vermöge der Relation (61) reducirt diese Formel sich auf

$$J_2 e^{iA_2} = \frac{\frac{r}{c^2 \cos \alpha} - e^{i(2\gamma - \varrho)}}{\frac{r}{c^2 \cos \alpha} + e^{i(2\gamma - \varrho)}}.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\cot \psi_2 = \cos (2\gamma - \varrho) \sin \left[2 \operatorname{Arctang} \frac{r}{c^2 \cos \alpha} \right], \quad (66)$$

so zieht man daraus

$$J_2^2 = \tan^2 \left(\psi_2 - \frac{\pi}{4} \right), \quad (67)$$

$$\tan A_2 = \sin (2\gamma - \varrho) \tan \left[2 \operatorname{Arctang} \frac{r}{c^2 \cos \alpha} \right].$$

Mit Hülfe dieser Formeln hat man die Intensität J_2^2 und die Phasendifferenz A_2 zu berechnen.

Setzt man

$$\frac{J_2}{J_1} = \tan \vartheta; \quad A_2 - A_1 = A,$$

so zieht man aus den Gleichungen (52), (53) und (54)

$$\tan \vartheta e^{iA} = \frac{u k r e^{i\varrho} - v^2}{u k r e^{i\varrho} + v^2} = \frac{e^{i\varrho} - \frac{\sin^2 \alpha}{r \cos \alpha}}{e^{i\varrho} + \frac{\sin^2 \alpha}{r \cos \alpha}},$$

und daraus die Formeln:

$$\cos 2 \vartheta = \cos \varrho \sin \left[2 \operatorname{Arctang} \frac{\sin^2 \alpha}{r \cos \alpha} \right], \quad . \quad . \quad (68)$$

$$\tan A = \sin \varrho \tan \left(2 \operatorname{Arctang} \frac{\sin^2 \alpha}{r \cos \alpha} \right), \quad . \quad . \quad (69)$$

welche dazu dienen, das Azimuth ϑ der wiederhergestellten Polarisation des reflectirten Strahles und die Phasendifferenz A zu berechnen').

Seyen A und Θ die von α und ϑ erlangten Werthe, wenn $A = \frac{1}{2} \pi$, d. h. ihre Hauptwerthe. Dann hat man nach den Formeln (68) und (69)

$$\begin{aligned} /^{A = \frac{1}{2} \pi} \quad \varrho &= 2 \Theta; \quad r = \sin A \tan A \quad . \quad (70) \end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (62), so zieht man daraus die Formeln

$$\tan \frac{2(\gamma - \Theta)}{\tan 2 \Theta} = - \cos 2 A, \quad . \quad . \quad (71)$$

$$c = \sin A \sqrt{\frac{\sin^4 \Theta}{\sin 2(2\Theta - \gamma)}} = \tan A \sqrt{\frac{\cos^2 \Theta}{\cos 2(\gamma - \Theta)}}, \quad . \quad (72)$$

mittelst welcher man die Werthe von c und γ bestimmen kann, wenn die von A und Θ durch Erfahrung gegeben sind.

Den Werth des Brechungsindex erhält man auf folgende Weise. Man hat

$$u' = v \cot \alpha' = k r \cos \varrho,$$

woraus man zieht:

$$\begin{aligned} v^2 (1 + \cot^2 \alpha') &= \frac{v^2}{\sin^2 \alpha'} = k^2 \mu^2 \\ &= k^2 r^2 \cos^2 \varrho + v^2, \end{aligned}$$

und endlich

$$\mu^2 = r^2 \cos^2 \varrho + \sin^2 \alpha \quad . \quad . \quad (73)$$

Für die normale Incidenz reducirt sich dieser Ausdruck auf

$$\mu_0 = c \cos \gamma.$$

Hat α seinen Hauptwerth, so ergibt sich mittelst der Formeln (70)

$$\mu^2_A = \tan^2 A (1 - \sin^2 A \sin^2 2 \Theta)$$

1) *Compt. rend.* 1839, *VIII.* p. 553 et 1848, *XXVI.* p. 86

Man sieht hierans, daß die Cauchy'schen Formeln den Werth von μ_A kleiner angeben, als es das Brewster'sche Gesetz verlangt.

Sehr wahrscheinlich hat Cauchy gesucht Differentialgleichungen rationell aufzustellen, welche die schwingende Bewegung des Aethers in Metallen auszudrücken vermöchten; allein er hat nichts darüber veröffentlicht. Der einzige bekannt gewordene Versuch dieser Art rührt von O'Brien her¹⁾.

Nach allgemein angenommenen Ideen entspringt die Auslöschung des Lichts in opaken Körpern daraus, daß ein Theil der Energie der schwingenden Bewegung des Aethers auf die wägbaren Molecüle übergeht, aber wenn man versucht, diese Ansicht in den Calcul einzuführen, so stößt man auf Schwierigkeiten. Um diese zu vermeiden, geht O'Brien von der Voraussetzung aus, daß die Amplituden der Aetherschwingungen in Bezug auf die gegenseitigen Abstände der wägbaren Molecüle groß sind und die charakteristische Eigenschaft besitzen, nur von dem Bewegungszustand des Elements abzuhängen, und nicht von der Verschiebung aus der Gleichgewichtslage.

Sich stützend auf die Analogie, welche nach dieser Voraussetzung zwischen den Oscillationen eines Pendels in einem widerstehenden Mittel und der Vibrationsbewegung des Aethers stattfindet, gelingt es ihm zu zeigen, daß die durch diese Bewegung entwickelten widerstehenden Kräfte die Form haben müssen

$$a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2s}{dt^2} + a_3 \frac{d^3s}{dt^3} + \text{etc.} \dots \quad (74)$$

worin s die Verschiebung des Elements und a_1, a_2, a_3 Constanten sind, die von der Constitution des Aethers und der wägbaren Materie abhängen. Nimmt man überdies an, die Vibrationen geschähen nach dem Gesetz welches der reelle Theil des Ausdrucks

1) Phil. Mag. 1844 (3) XXV. p. 326 et 521; XXVI. p. 114 et 287.

Φe^{-ist}

anzeigt, worin Φ eine von t unabhängige Function ist, so läßt sich der Ausdruck (74) reduciren auf

$$P \frac{ds}{dt} + Q \frac{d^2 s}{dt^2},$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$P = a_1 - a_3 s^2 + a_5 s^4 - \dots$$

$$Q = a_2 - a_4 s^2 + a_6 s^4 - \dots$$

Sei das zweite Mittel der in einem Metall enthaltene Aether. Wendet man im gegenwärtigen Fall die vorstehenden Betrachtungen an, so werden die von der wägbaren Materie auf ein Aetherelement ausgeübten Projectionen auf die Widerstandsaxen ausgedrückt seyn durch

$$- \left(P' \frac{d\xi'}{dt} + Q' \frac{d^2 \xi'}{dt^2} \right),$$

$$- \left(P' \frac{d\eta'}{dt} + Q' \frac{d^2 \eta'}{dt^2} \right),$$

$$- \left(P' \frac{d\zeta'}{dt} + Q' \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} \right).$$

Um die Bewegungsgleichungen zu erhalten, muß man vermöge des d'Alembert'schen Principis in den Gleichungen (4) Seite 182 die X, Y, Z ersetzen durch die Ausdrücke:

$$- \frac{d^3 \xi'}{dt^3} - \left(P' \frac{d\xi'}{dt} + Q' \frac{d^2 \xi'}{dt^2} \right),$$

$$- \frac{d^3 \eta'}{dt^3} - \left(P' \frac{d\eta'}{dt} + Q' \frac{d^2 \eta'}{dt^2} \right),$$

$$- \frac{d^3 \zeta'}{dt^3} - \left(P' \frac{d\zeta'}{dt} + Q' \frac{d^2 \zeta'}{dt^2} \right).$$

So verfahrend, kann man diese Gleichungen schreiben:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3 \xi}{dt^3} + R' \frac{d\xi}{dt} &= (G' - H') \frac{dv}{dx} + H' \left(\frac{d^3 \xi}{dx^3} + \frac{d^3 \xi}{dy^3} + \frac{d^3 \xi}{dz^3} \right) \\ \frac{d^3 \eta}{dt^3} + R' \frac{d\eta}{dt} &= (G' - H') \frac{dv}{dy} + H' \left(\frac{d^3 \eta}{dx^3} + \frac{d^3 \eta}{dy^3} + \frac{d^3 \eta}{dz^3} \right) \\ \frac{d^3 \zeta}{dt^3} + R' \frac{d\zeta}{dt} &= (G' - H') \frac{dv}{dz} + H' \left(\frac{d^3 \zeta}{dx^3} + \frac{d^3 \zeta}{dy^3} + \frac{d^3 \zeta}{dz^3} \right) \end{aligned} \right\} (75)$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$R' = \frac{P'}{1+Q'}; \quad G' = \frac{L+2M}{e'(1+Q')}; \quad H' = \frac{M}{e'(1+Q')}.$$

P' und Q' sind gegeben durch die Formeln:

$$P' = a_1 - a_3 s^2 + a_5 s^4 - \dots$$

$$Q' = a_2 - a_4 s^2 + a_6 s^4 - \dots$$

Den Gleichungen (75) kann genügt werden durch Integrale von der Form (50)

$$\xi = Ae^{-Ux + i(ux + vy - st)}$$

$$\eta = Be^{-Ux + i(ux + vy - st)}$$

$$\zeta = Ce^{-Ux + i(ux + vy - st)}$$

Die darin eintretenden Constanten müssen den beiden Systemen von Gleichungen genügen: man muß haben:

$$\left. \begin{aligned} A'(u' + iU') + B'v &= 0 \\ s^2 - iR's &= H'(k' + iK')^2 \\ (k' + iK')^2 &= (u' + iU')^2 + v^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots (76)$$

oder vielmehr

$$\left. \begin{aligned} \frac{A''}{u'' + iU''} &= \frac{B''}{v}; \quad C'' = 0 \\ s^2 - iR''s &= G''(k'' + iK'')^2 \\ (k'' + iK'')^2 &= (u'' + iU'')^2 + v^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots (77)$$

Der erste Modus giebt die transversalen Vibrationen, der zweite die longitudinalen.

Die Relationen (76a) und (76c) sind identisch mit denen (51) und (57) von Cauchy. Ebenso sind die Bedingungen bezüglich der Oberfläche offenbar dieselben in beiden Fällen. Daraus muß man schließen, daß die daraus von O'Brien abgeleiteten Formeln, obwohl sie sich unter einer andern Form darbieten, im Grunde identisch sind mit denen von Cauchy, wenigstens wenn man die Ellipticität vernachlässigt, die von den longitudinalen Vibrationen herrührt. Was diese letzteren Vibra-

tionen betrifft, so muß man nämlich bemerken, daß sie nach den Formeln (77) nicht ganz analog sind denen, welche die Reflexion an durchsichtigen Substanzen erzeugt. Denn die Größe u'' kann nicht gleich Null seyn, weil das zu der unmöglichen Relation führt:

$$R' = 0$$

Die Analyse von O'Brien giebt überdies die Relation (76b)

$$s^2 - i R' s = H' [(u' + i U')^2 + v^2],$$

oder was auf dasselbe hinausläuft

$$s^2 = H' (u'^2 + v^2 - U'^2); R' s = -2 H' u' U'. \quad (78)$$

Gesetzt, das erste Mittel sey freier Aether, nur seyen ω und ω' die respectiven Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im ersten und im zweiten Mittel, so hat man

$$s^2 = \omega^2 k^2 = \omega'^2 (u'^2 + v^2),$$

woraus

$$u'^2 = k^2 (\mu^2 - \sin^2 \alpha).$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (78), so erhält man nach Elimination von U'

$$(\mu^2 - \frac{\omega^2}{H'}) (\mu^2 - \sin^2 \alpha) = \frac{R'^2 \omega^2}{4 H'^2} \cdot \frac{1}{k^2} \cdot \cdot \quad (79)$$

Um einen genäherten Werth vom Brechungsindex zu erhalten, kann man beim zweiten Gliede der Ausdrücke für die Widerstandskräfte stehen bleiben, was P' und Q' und folglich R' und H' auf Constanten reducirt. Erinnert man sich der Formel $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, so sieht man, daß die Werthe von μ , berechnet mittelst der Relation (79) für eine gegebene Incidenz, mit λ zunehmen, d. h. daß die Dispersion der Metalle im Allgemeinen anomal seyn muß, entgegengesetzt der bei durchsichtigen Körpern. Wir werden indess weiterhin zeigen, daß die Gleichung (79) nicht verträglich ist mit der Relation (73).

Die ersten Versuche zur Prüfung der theoretischen Formeln verdankt man Mac-Cullagh¹⁾. Er fand, daß seine Resultate mit großer Genauigkeit repräsentirt wer-

1) *Proceed. of the Irish Acad.* 1842—43, VII. p. 375.

den, selbst durch die vereinfachten Formeln, welche übereinstimmen mit denen, die wir sogleich (80) geben werden.

Zahlreichere Bestätigungen haben Herrn Jamin's Untersuchungen über die Metall-Reflexion geliefert¹⁾. Derselbe hat alle experimentell gefundenen Thatsachen verglichen mit den nach Cauchy's Formeln berechneten Resultaten. Um die theoretischen Werthe der Intensität herzuleiten, bediente er sich der vereinfachten Formeln. In der That ist die GröÙe $\frac{1}{c}$ für die Metalle so klein, daß es erlaubt ist, die höheren Potenzen zu vernachlässigen. Alsdann reduciren sich die Formeln (63) auf:

$$\rho = \gamma; r = c.$$

Nun haben wir vorhin für die Haupt-Incidenz die Relation (70) gefunden, woraus

$$\gamma = 2 \Theta; c = \sin A \tan A.$$

Bringt man diese Werthe in die Gleichungen (64) . . . (67), so erhält man zur Berechnung der Intensitäten die Formeln:

$$\left. \begin{aligned} J_1^2 &= \tan^2 \left(\psi_1 - \frac{\pi}{4} \right), \\ \cot \psi_1 &= \cos 2 \Theta \sin \left[2 \operatorname{Arctang} \frac{\cos A \cos a}{\sin^2 A} \right], \\ J_2^2 &= \tan^2 \left(\psi_2 - \frac{\pi}{4} \right), \\ \cot \psi_2 &= \cos 2 \Theta \sin \left[2 \operatorname{Arctang} \frac{\cos A}{\sin^2 A \cos a} \right]. \end{aligned} \right\} \dots (80)$$

Aus dieser Vergleichung geht hervor, daß die beobachteten und berechneten Werthe eine größtmögliche Uebereinstimmung zeigen, d. h. die Unterschiede immer GröÙen von der Ordnung der Beobachtungsfehler sind. Man muß jedoch bemerken, daß das Verfahren zur Messung der Intensitäten keiner großen Vollkommenheit fähig ist.

1) *Compt. rend.* 1845, XXI. p. 430, et les *Tomes suiv.* — *Ann. de chim. et de phys.*, XIX. p. 296, 1847; XXII. p. 311, 1848.

Unter den von Herrn Jamin gefundenen Resultaten, welche Cauchy's Theorie nicht vorausgesehen hatte, ist zunächst zu erwähnen, daß bei den von ihm beobachteten Metallen die Haupt-Incidenzen A vom Rothen zum Violetten abnehmen, daß aber für die Gröfse Θ kein solch allgemeines Gesetz besteht. Man kann daraus schliessen, daß die Dispersion der Metalle im Allgemeinen anomal seyn muß, daß sie aber nach den Berechnungen von Beer¹⁾ und von Eisenlohr²⁾ nicht immer der der durchsichtigen Körper entgegen ist.

Die Versuche der Herren de la Provostaye und Desains über die Reflexion der strahlenden Wärme haben auch Resultate ergeben³⁾, die mit den aus Cauchy's Formeln abgeleiteten übereinkommen.

Herr Haughton hat sich mit dem experimentellen Studium der Reflexion des Lichts von Metallen beschäftigt⁴⁾, aber seine Beobachtungen sind noch nicht mit den theoretischen Formeln verglichen.

Endlich hat Herr Quincke in seinen umfangreichen optischen Untersuchungen die Reflexion und die Refraction bei Metallen durch mehrer Methoden untersucht⁵⁾. Er hat erkannt, daß die Cauchy'schen Formeln die Resultate der Erfahrung auf eine genügende Weise darstellen, nicht allein für die gewöhnliche Reflexion, sondern auch für die Reflexion an sehr dünnen und durchscheinenden Metallblättchen. Zur Berechnung des Intensitätsverhältnisses und der Phasendifferenz bedient er sich der folgenden vereinfachten Formeln

1) Pogg. Ann. XCII. p. 417.

2) Pogg. Ann. CIV. p. 375.

3) *Compt. rend.* 1847, XXIV. p. 684. — *Ann. de chim. et de phys.* 1849, XXVII. p. 121.

4) *Phil. Transact.* 1863, p. 81.

5) Pogg. Ann. 1863, CXIX. p. 368 und CXX. p. 599; 1866, CXXVIII. p. 541 und CXXIX., p. 177; 1867, CXXXII. p. 321 und 561 1871, CXLII. p. 177 und 380.

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\vartheta &= \cos 2\theta \sin \left[2 \operatorname{Arctang} \frac{\sin \alpha \operatorname{tang} \alpha}{\sin A \operatorname{tang} A} \right] \\ \operatorname{tang} A &= \sin 2\theta \operatorname{tang} \left[2 \operatorname{Arctang} \frac{\sin \alpha \operatorname{tang} \alpha}{\sin A \operatorname{tang} A} \right] \end{aligned} \right\} \cdot (81)$$

deren Approximationsgrad dem der Formeln (80) gleich ist.

Er hat auch versucht den Refraktionsindex der Metalle direct zu messen, hat aber dies schwierige Problem noch nicht auf eine definitive Weise gelöst.

Zusammengefaßt, in allen Fällen, wo es möglich war die Formeln (64) . . (69) mit den Beobachtungen zu vergleichen, hat man sie immer mit diesen übereinstimmend gefunden, wenn es sich um die Metallreflexion handelte.

Was dagegen die Gleichung (79) betrifft, so hat man zu bemerken, daß sie nicht mit der Relation (73) vereinbar ist. Die Erfahrung zeigt nämlich, daß bei den Metallen r und ϱ fast constante Größen sind. Mit Rücksicht auf diese Thatsache sieht man leicht, daß es unmöglich ist, der Gleichung (79) durch aus der Formel (73) gezogene Werthe von μ^2 zu genügen, weil H' und R' Constante sind, wenigstens für einen bestimmten Werth von λ . Diefs ist der Hauptfehler der O'Brien'schen Theorie, welche, da sie eine rationelle Aufstellung der Gleichung (57) zur Absicht hat, ohne dieses Aufmerksamkeit verdienen würde, obwohl seine Fundamentalhypothese nicht übereinstimmt mit Cauchy's Ideen von der Constitution der Körper.

(Schluß im nächsten Heft.)

III. Studien über erd-magnetische Messungen; von Karl Braun, S. J.

(Fortsetzung von S. 353.)¹⁾

B. Deklinations-Bestimmungen mittelst des Inklinatorium's.

Dafs mit Hilfe des Inklinatorium's auch die Deklination bestimmt werden kann, ist sehr einleuchtend. Man braucht nur dasjenige Azimuth aufzusuchen, in welchem die Nadel sich genau vertikal stellt, so liegt 90° davon der magnetische Meridian. Vergleicht man dann diese Stellung mit einem Gegenstand, dessen astronomisches Azimuth bekannt ist, so ergibt sich die Deklination sehr leicht. Ob diese Idee schon practisch ausgeführt worden, und ob sie von einigem Erfolg gewesen sei, ist mir nicht bekannt. Ich wurde darauf geleitet durch das Streben, mit dem Nadel-Inklinatorium alle magnetischen Elemente bestimmen zu können. Im folgenden werde ich zuerst die von mir befolgte Methode erklären und dann eine Prüfung über den von derselben zu erwartenden Grad von Genauigkeit anstellen.

Um diese Methode auszuführen, mufs an dem Inklinatorium ein *Fernröhrchen* mit Fadenkreuz angebracht werden. Ich befestigte ein solches auf der Alhidade des Vertikalkreises zwischen den Mikroskopen in einer Weise, dafs es sehr leicht entfernt werden konnte, nämlich mittelst der Schrauben, welche die Ablenkungs-Nadel bei der Lloyd'schen Intensitätsbestimmung, resp. deren Futteral festhalten. Mittelst dieses Fernröhrchen ist es sehr leicht, das Instrument in den astronomischen Meridian zu bringen. Hat man einen constanten Beobachtungsort, so ermittelt man ein- für allemal das Azimuth einer geeigneten Mire. Ist dieser Vortheil nicht vorhanden, so berechnet man das Azimuth aus der Stellung der Sonne, welche mittelst des Instrumentes selbst gemessen wird.

1) Berichtigung: S. 335 Z. 3. u. 4 ist G' mit G und G''' mit G'' zu vertauschen; ebenso S. 337 Z. 16, i_4 mit i_3 und i_3 mit i_7 .

Es ist ferner auch leicht, die Lage des magnetischen Meridians zu bestimmen. Man braucht zu dem Zweck nur die Inklination der Nadel in einer Vertikal-Ebene zu messen, welche angenähert senkrecht auf dem magnetischen Meridian steht. Und da dieß ohnehin schon bei jeder vollständigen Inklinations-Messung geschieht, so ist ersichtlich, daß man die Deklination mit den Daten der Inklinations-Messung selbst schon bestimmen kann, ohne daß weitere Operationen verlangt würden. Nur müssen die Messungen in der magnetischen West-Ost-Ebene mit viel mehr Sorgfalt ausgeführt werden, als es zum Zweck der bloßen Inklinationsbestimmung nothwendig wäre. Aus den beiden Inklinationen i' und i'' (v. sup.) findet man dann sehr leicht den Winkel a , um welchen der vorläufig angenommene magnetische Meridian von dem wahren abweicht, durch die einfache oben schon abgeleitete Formel (4) $i_{,,} = -\cot. i. a$, oder $a = -i_{,,} \cdot \operatorname{tg} i$, in welcher $i_{,,}$ die beobachtete Abweichung der Nadel von der Vertikalen bedeutet.

Obwohl dieß Alles sehr einfach ist, gebe ich doch eine ganz kurze Beschreibung der auszuführenden Operationen, hauptsächlich um einige practische Regeln dabei anzugeben, welche beobachtet werden müssen, wenn das Resultat genau werden soll, oder welche doch die Ausführung wesentlich erleichtern.

Um also eine vollständige Bestimmung der Deklination und Inklination auszuführen, beginnt man mit dem Horizontalstellen des Instrumentes. Hierin nun ist keineswegs eine so große Genauigkeit erforderlich, als man zu glauben geneigt ist. Man kann in der That die Libellen-Blase um einen ganzen Zoll ihren Stand ändern lassen, ohne daß die abgelesene Inklination sich um mehr als etwa zwei Minuten änderte. Abweichungen von 1^{mm} oder 2^{mm} sind also von sehr wenig Bedeutung.

Dann wird die Nadel ummagnetisirt, und zwar so, daß bei allen entsprechenden Messungen stets das gleiche Ende den gleichen Pol besitzt. Nadel, Zapfen und Agat-

Kanten werden mit einem weichen Pinsel überfahren, nöthigenfalls auch die Nadel mit einem weichen Lappchen von Stahltheilchen gereinigt, und diese eingelegt — alles mit Hilfe zweier Pincetten von Ebenholz oder Fischbein¹⁾, und ohne die Nadel mit bloßen Fingern zu berühren.

Dann orientirt man das Instrument. Zu diesem Zweck pflegt man so zu verfahren, daß man die Nonien auf 90° einstellt, und dann das Instrument dreht, bis die Nadelspitzen in den Mikroskop-Fäden einspielen. Wegen der Excentricität, Collimation etc. wird dann das Inklinatorium um etwa 180° gedreht und ebenso verfahren. Aus den beiden Azimuthal-Stellungen nimmt man das Mittel, und mit diesem erhält das Instrument die gewünschte Orientation.

Weit leichter und genauer geschieht aber diese Orientation mittelst des Fernröhrchens, wenn eine Mire von bekanntem Azimuth vorhanden ist. Man visirt nur die Mire, und dreht dann das Instrument um den Betrag des magnetischen Azimuths derselben (unter Annahme einer angenäherten Deklination) plus der Collimation des Fernröhrchens, welche constant und schon vorher ermittelt ist. Damit ist das Inklinatorium im magnetischen Meridian aufgestellt; und habe ich bei diesem Verfahren nur Azimuth-Fehler von höchstens 6 Minuten gemacht, während bei dem gewöhnlichen Verfahren Fehler von 20 und mehr Minuten vorkamen.

Die gefundene Azimuthal-Stellung ändert man dann noch ein wenig, bis der Nonius gerade eine ganze Minute anzeigt. Da man das Instrument 15mal drehen und den Nonius auf dieselbe Zahl der Limbus-Theilung einstellen muß, so erreicht man dies unvergleichlich leichter und sicherer, wenn man jedesmal auf eine ganze Minute einstellt, als wenn auch noch ein Bruchtheil abgeschätzt werden müßte. Da ein kleiner Fehler unvermeidlich ist,

1) Ich habe zu diesem Zweck ein eigenes Zängelchen aus Messing construirt mit breiten leder-belegten Spitzen, welches sehr gute Dienste leistet.

der nachher durch Rechnung eliminirt wird, so ist die kleine Aenderung des Fehlers ohne allen Nachtheil. Das so bestimmte Azimuth wird notirt. Dann notirt man auch noch das Instrumental-Azimuth eines fernen Gegenstandes oder einer Mire, auch wenn deren absolutes Azimuth nicht bekannt ist. Dieselbe visirt man sowohl in der Stellung „Kreis links“ als auch „Kreis rechts.“

Die Messungen an der Nadel selbst bilden — wie schon bemerkt — 4 Gruppen, entsprechend dem viermaligen Ein- oder Umlegen der Nadel. In der ersten mißt man die Stellung der Nadel, während der Kreis successiv gegen Süd, Nord, Ost, West steht. Dann legt man die Nadel um und macht die gleichen Messungen in umgekehrter Ordnung.

Nach dieser ersten Hälfte der Messungen ist es gut, wieder die Mire zu beobachten, um sich zu überzeugen, daß das Instrument keine azimuthale Verschiebung erlitten habe. Doch genügt dazu eine einzelne Beobachtung, z. B. mit „Kreis links“ oder „Kreis rechts“. Danach werden die Pole gewechselt, und dieselben Messungen der Nadel-Stellungen in gleicher Ordnung wiederholt. Am Schluß beobachtet man nochmals die Mire, und zwar mit „Kreis links“ und „Kreis rechts“. Dieß ist die ganze Operation, und bei einiger Uehung kann dieselbe recht gut in 55 Minuten vollendet werden.

Es ist aber hierbei in Bezug auf die Messungen in der magnetischen Ost-West-Ebene ein Umstand sehr wohl im Auge zu behalten, daß man nämlich die Ablesungen stets auf den richtigen Nullpunkt beziehe. Dieselben geschehen nahe bei dem Theilstrich 90° ; und dieses 90 gehört zweien entgegengesetzten Graduationen an. Man muß aber als Nullpunkt stets einen *im Raum fixen* Punkt annehmen; z. B. den magnetischen Ost-Punkt oder den West-Punkt. Damit ist natürlich verbunden, daß der instrumentale Nullpunkt beständig wechselt; und eben deshalb erfordern diese Ablesungen Aufmerksamkeit. Ich habe stets die Winkel vom magnetischen Ost-Punkt an abwärts gezählt,

und das möchte vielleicht auch vorzuziehen seyn, indem dann die Correction $\alpha = -\Delta a$ im Azimuth mit dem Winkel i , gleiches Vorzeichen bekommt, und die Winkel a und i'' im gleichen Sinn ab- oder zunehmen.

Dieselbe Vorsicht ist auch bei den einfachen Inklinationsmessungen nothwendig. Zwar kann hiebei der Winkel i , im Mittel positiv oder negativ seyn, ohne daß die Correction für die Inklination ihr Zeichen änderte; aber jenes Mittel selbst wird nicht den richtigen Werth bekommen, wenn man nicht bei den einzelnen Messungen den richtigen Nullpunkt einhält.

Die *Rechnung* ist dann sehr einfach. Man bestimmt die Mittelwerthe für i' und i'' ; daraus die *Correction* $\alpha = \operatorname{tg} i \cdot i'' = \operatorname{tg} i \cdot (90^\circ - i')$, wobei für i ohne Bedenken auch ein angenäherter, für längere Zeit constanter Werth gesetzt werden kann, und dieses α fügt man mit dem aus dieser Gleichung selbst sich ergebenden Vorzeichen dem eingangs notirten Azimuth hinzu. Damit ist das Instrumental-Azimuth des magnetischen Meridians genau bestimmt. — Die Vergleichung mit astronomischen Azimuthen geschieht dann im Allgemeinen wie bei anderen Deklinationen, obgleich dabei in der Praxis das Inklinatorium noch mehrfache Vortheile besitzt, wie weiter unten gezeigt wird.

Was nun die *Genauigkeit* dieser Methode der Deklinationsbestimmungen angeht, so ist vor allem ein bedeutender systematischer Fehler hervorzuheben. Durch das oben beschriebene Verfahren wird nämlich die *Drehungsebene der Nadel* in den magnetischen Meridian gebracht; durch astronomische Operationen, Beobachtung von Miren etc. wird nicht diese, sondern die *Ebene des Vertikalkreises* mit dem astronomischen Meridian verglichen. Man kann aber auch bei den allerbesten Instrumenten nicht voraussetzen, daß beide Ebenen genau parallel seyen. Die gefundene Deklination bedarf also noch einer Correction, welche eben gleich dem Winkel

ist, den diese beiden Ebenen im azimuthalen Sinn mit einander bilden.

Diese Correction kann mit Hilfe einiger kleinen Zuthaten mit dem Instrument selbst bestimmt werden. Man befestigt ein kleines Stückchen von einem Spiegel an einem Ende der Nadel parallel zu deren Fläche. Das Fernröhrchen, welches zu diesem Zweck die Beleuchtung der Fäden von der Okularseite gestatten muß (wie bei dem Lamont'schen Theodolit), wird durch eine eigene Vorrichtung senkrecht zum Vertikalkreis an dessen Alhidade befestigt. Dann beobachtet man in dem Spiegelchen das reflectirte Bild des vertikalen Fadens, und bringt es mit irgend einem im Fernrohr nahe daneben erscheinenden irdischen Gegenstand durch die Mikrometerschraube des Horizontalkreises zur Coincidenz. Geschieht dies einmal, während das Spiegelchen von dem oberen Ende der in der Gabel vertikal gehaltenen Nadel getragen wird, und dann wieder, wenn dasselbe Ende 180° davon entfernt unten steht, so ist die für die zweite Beobachtung notwendige Drehung am Horizontalkreis gleich dem doppelten Werth der gesuchten Correction.

Ich habe indessen diese Correction nicht auf diesem Wege, sondern nur durch Vergleichung der Resultate mit denen eines guten Deklinatoriums bestimmt. Das möchte vielleicht auch vorzuziehen seyn, falls man ein zuverlässiges Deklinatorium zeitweilig zur Verfügung haben kann; obgleich man damit auf den principiellen Vorzug, daß das Inklinatorium den *absoluten* Werth der *Deklination* angebe, verzichten würde. — Uebrigens hoffe ich nach einiger Zeit noch eine andere Methode anzugeben, mittelst des Inklinatoriums die absolute Deklination zu bestimmen, welche von diesem Fehler unabhängig ist. Dieselbe bedarf nur erst noch der experimentellen Prüfung.

Die *Genauigkeit* solcher Deklinationsbestimmungen ist also dann nur noch von den *zufälligen Fehlern* abhängig. In Bezug auf diese nun scheint es wohl, daß dieselben hinter den mit guten Deklinatorien angestellten Messungen

zurückstehen müßten. Denn jene Methode hat für's erste den Nachtheil, daß die Messung von Inklinationen an sich nicht einer solchen Präcision fähig scheint, welche bei einer Deklinations-Nadel mit Faden-Suspension erreichbar ist. Dann aber kommt noch dazu, daß ein etwaiger Fehler in der Inklination i'' durch die Multiplikation mit $\tan i$ noch beträchtlich vergrößert wird.

Dennoch glaube ich, daß diese Uebelstände nicht von großem Belang sind, und daß man solche Deklinationsbestimmungen für hinreichend genau und auch dem heutigen Stand der Wissenschaft entsprechend halten kann. Die Deklinatorien selbst sind dagegen ihrerseits Fehlern unterworfen, von welchen die Inklinatorien frei sind. Dahin gehört namentlich der durch die Torsion des Fadens bewirkte Fehler, welcher nur schwer genau bestimmt und nie vollständig eliminiert werden kann.

Die *Torsion* eines Suspensionsfadens organischen Ursprungs ist zunächst nicht eine constante Größe, sondern von vielen Umständen, wie Temperatur, Feuchtigkeit, Bestrahlung durch die Sonne etc. abhängig. In der That habe ich bei meinen Schwingungsbeobachtungen mehrmals bemerkt, wie innerhalb 20 Minuten die Gleichgewichtslage der Nadel um volle 2 Minuten mehr sich änderte, als die gleichzeitigen Beobachtungen am Variations-Deklinatorium ersehen ließen, und doch habe ich noch die directe Bestrahlung durch die Sonne durch einen Schirm abgehalten. — Aber auch wenn die Torsion constant wäre, so ist doch bei den gebräuchlichen Deklinatorien kein Mittel gegeben, den Torsions-Winkel genau zu bestimmen. Man ist darin vielmehr auf eine Schätzung der Stellung des Hilfsstabes angewiesen, und diese ist wohl Fehlern von 10 bis 20 Grad ausgesetzt, was dann in der Deklination schon einen Fehler von 1 Minute hervorbringen kann.

Bei der Deklinationsbestimmung mittelst des Inklinatorium's giebt es keine Torsion. Die Genauigkeit der Inklinationsmessungen ist, wie oben nachgewiesen wurde,

durch den mittleren Fehler von 20 Sekunden angegeben. Allerdings würde derselbe für die vertikale Componente in Rom etwa 23",5 seyn, aber in Deutschland würde er wegen der stärkeren vertikalen Intensität wieder etwa = 20" seyn. Wird dies mit $\operatorname{tg} i$ multiplicirt, so ergibt sich für die Deklinationsbestimmungen in den mittleren Theilen Europa's ein mittlerer Fehler von 30 bis 50 Sekunden, was wohl als eine hinreichende Genauigkeit gelten kann.

Dazu sollte nun allerdings scheinbar der Fehler kommen, welchen die fehlerhafte Gestalt der Nadelzapfen, der etwaige Magnetismus von Instrumentaltheilen, der Mangel an Planparallelismus der Glasscheibe etc. in dem absoluten Werth der Inklination verursachen. Allein eine aufmerksame Betrachtung zeigt, daß diese Fehler schon bei den Messungen von i im Mittel vollständig von selbst eliminiert werden. Die Nadel steht nämlich bei diesen Messungen vertikal, ruht somit stets auf denselben Punkten der Zapfen und folglich kommt der Zapfenfehler gleichvielmal positiv und negativ in der gleichen GröÙe vor, verschwindet somit im Mittel. Ebenso haben die anderen Fehler absolut einen constanten Werth; weil aber die Ablesungen abwechselnd in zwei entgegengesetzten Richtungen an der Graduation erfolgen (v. sup. S. 416), so sind die Fehler ebensovielmal positiv wie negativ, und fallen deshalb im Mittel von selbst weg. — Aber auch wenn dieselben nicht von selbst eliminiert würden, so würden sie dennoch durch den Uebergang zur Deklination wegfallen, wenn man die nothwendige Correction (v. s. 418.) durch Vergleichung mit einem guten Deklinatorium ermittelt. Diese Correction würde dann die Wirkung jener Fehler schon in sich begreifen, und somit eliminiren.

Diese theoretischen Betrachtungen habe ich nun an den Resultaten meiner Messungen geprüft. Zu dem Ende reducirte ich alle von mir ausgeführten Bestimmungen auf den Skalentheil 80 des Variations-Deklinatoriums. So erhielt ich mittelst des Inklinatoriums

den 18. März	1870	reduc.	Deklin. $13^{\circ} 15',76$	mit Nadel I.
" 18. "	"	"	" $13^{\circ} 15',615$	" " II.
" 21. "	"	"	" $13^{\circ} 14,504$	" " I.
" 9. Mai	"	"	" $13^{\circ} 15,75$	" " I.
" 20. Juni	"	"	" $13^{\circ} 15,91$	" " I.
" " "	"	"	" $13^{\circ} 15,75$	" " II.
" 21. Juli	"	"	" $13^{\circ} 18,71$	" " I.
" 10. August	"	"	" $13^{\circ} 14,90$	" " II.
" 13. "	"	"	" $13^{\circ} 15,74$	" " I.
" 27. "	"	"	" $13^{\circ} 15,22$	" " I.

Mittel $13^{\circ} 15,786$

Aus diesen Zahlen ergibt sich nach der Methode der kleinsten Quadrate als mittlerer Fehler $1',123$ oder $67,4$ Sekunden.

In gleicher Weise stellte ich die durch das Deklinatorium¹⁾ erhaltenen Resultate zusammen, nämlich

den 22. März	1870	reduc.	Deklin. = $13^{\circ} 10',280$
" 12. Mai	"	"	" = $13^{\circ} 7,831$
" 15. Juli	"	"	" $13^{\circ} 12,354$
" 11. August	"	"	" $13^{\circ} 10,863$
" 28. "	"	"	" $13^{\circ} 9,250$

Mittel $13^{\circ} 10',106$

Diese Zahlen geben einen mittleren Fehler von $1',696$ oder $101,8$ Sekunden an.

Dieselbe Untersuchung stellte ich dann auch über die im Jahre 1871 gemachten Messungen an. Dabei fand ich mit dem Inklinatorium

den 22. Januar	1871	reduc.	Deklin. = $13^{\circ} 20',75$	mit Nadel I.
" 20. Juli	"	"	" $13^{\circ} 18,86$	" " I.
" " "	"	"	" $13^{\circ} 19,42$	" " II.
" 10. August	"	"	" $13^{\circ} 20,40$	" " I.
" 16. "	"	"	" $13^{\circ} 17,45$	" " I.
" 30. "	"	"	" $13^{\circ} 16,46$	" " II.
" 31. "	"	"	" $13^{\circ} 21,27$	" " I.
" 1. September	"	"	" $13^{\circ} 20,435$	" " I.
" 2. "	"	"	" $13^{\circ} 20,595$	" " II.

Mittel $13^{\circ} 19',516$

¹⁾ Dieses Instrument ist gleichfalls eines von den auf englischen Stationen gebräuchlichen, von Jones in London gearbeitet und in gutem Zustand. Ebenso das unter C zu erwähnende tragbare Magnetometer.

In demselben Zeitraum gab das Deklinatorium

den 22. Januar 1871	reduc. Deklin.	=	13° 11',41
" 28. August	" " "		13° 9,36
" " " " "	" " "		13° 10,60
" 29. " " "	" " "		13° 9,044

Mittel 13° 10',103 '1)

Die Messungen mit dem Inklinatorium zeigen also einen mittleren Fehler von 1',635 oder 98 Secunden; die mit dem Deklinatorium ausgeführten einen von 1',344 oder 81 Secunden. Diese sind etwas genauer, jene etwas weniger genau als im Jahre 1870. Diefes ist nach dem oben (S. 346) über die Reisetouren des Inklinatoriums Gesagten nicht zu verwundern. Im Gegentheil ist es auffallend, daß mit einem locker gewordenen Faden die Messungen noch diesen Grad von Genauigkeit haben; und ist das wohl dem Umstand zuzuschreiben, daß hierbei der Mikroskop-Faden nur in vertikaler Stellung gebraucht wird, und bei solcher die Lockerheit des Fadens wenig Abweichung bewirkt hat. Wäre der Fehler nicht eingetreten, so würden auch die Messungen mit dem Inklinatorium genauer ausgefallen seyn als im Vorjahr. Indessen ist auch so schon im Mittel die Genauigkeit derselben größer, als die mit dem Deklinatorium erreichte, wenn beide Jahre zusammengefaßt werden.

Die angeführten Messungen mit dem Deklinatorium können aber auch keineswegs als besonders unvollkommen erklärt werden. In der That zeigen die Deklinationsbestimmungen an den besten Observatorien keine größere Genauigkeit als diese. Man findet in den betreffenden

- 1) Anm. Die Vergleichung der Mittel aus entsprechenden Zahlenreihen ergiebt auch die oben besprochene Correction, um die mit dem Inklinatorium erhaltenen Resultate auf *absolute Deklination* zu reduciren. Dieselbe ist = - 5',68 für 1870 und - 9',41 für 1871. Der Vertikalkreis hat also sein Azimuth um 3',7 geändert, was ebenfalls beweist, daß das Instrument auf den Reisen heftige Stöße erlitten hatte.

Jahrbüchern bis in die neueste Zeit noch stets ein Schwanken der reducirten Deklination, welches innerhalb eines Jahres 5 bis 20 Minuten beträgt. Es ist das vielleicht dem Torsionsfehler zuzuschreiben und könnte als Bestätigung des oben über denselben Gesagten gelten.

Man kann danach mit Bestimmtheit behaupten, daß bei unversehrtem Instrument und einiger Uebung und Sorgfalt im Beobachten die mit dem Inklinatorium ausgeführten Deklinationsbestimmungen wenigstens denselben Grad von Genauigkeit erreichen, wie die mit den besten gebräuchlichen Deklinatorien erzielten Resultate, und daß man den *mittleren Fehler* sorgfältiger derartiger Bestimmungen etwa gleich *1 Minute* annehmen darf.

Uebrigens ist wahrscheinlich anzunehmen, daß die Variationsdeklinatorien selbst nicht einen ganz fehlerlosen Gang einhalten, wie oben vorausgesetzt wird. Bei dem römischen waren aber in der That viele schädliche Spinnfäden sichtbar. Ein Theil der Fehler wird also dann diesem Instrument zur Last fallen; und der mittlere Fehler einer Deklinationsbestimmung mit dem Inklinatorium auf etwa 50" oder 40" herabsinken, somit dem oben (S. 420) theoretisch gefundenen Werth (30" bis 50") ziemlich gleich werden.

Gilt das nun aber in Betreff der Deklinatorien an stabilen Observatorien, wo genau gemessene Miren vorhanden sind, so gilt es um so mehr bei Messungen auf Reisen. Es kommt da zu den sonstigen Ursachen von Ungenauigkeit, noch diejenige, welche mit der Bestimmung eines absoluten Azimuths verbunden ist. Darin nun ist das mit einem Fernröhrchen in beschriebener Weise ausgerüstete Inklinatorium den seither gebräuchlichen Apparaten sicher bedeutend überlegen.

Bei den seither üblichen Deklinationsbestimmungen wird mit einem andern Instrument (gewöhnlich Spiegelsextant oder Reflexions-Prismen-Kreis) die Höhe der Sonne gemessen, daraus die Zeit berechnet und die Uhr berichtigt. Dann wird mit dem Deklinatorium oder magneti-

schen Theodolit das Instrumental-Azimuth der Sonne gemessen und aus der gleichzeitig abgelesenen Zeit das *wahre* Azimuth berechnet, wonach dann das wahre Azimuth einer Mire bestimmt wird. Bei diesem Verfahren können sich Fehler einschleichen in der Bestimmung der Zeit, durch den fehlerhaften Gang der Uhr und durch die Unsicherheit bei der nothwendigen zweimaligen Ablesung derselben. Wenn ein fähiger *Gehilfe* zur Hand ist, kann man allerdings die beiden Beobachtungen ungefähr gleichzeitig machen, und dadurch die ersteren Fehler ziemlich eliminiren, den letzteren jedoch nicht. Dazu kommt, daß bei der Messung des Azimuthes der Sonne ein Mangel an Horizontalität der Höhen-Axe das Resultat fälschen kann, ohne daß der Fehler mit dem Instrument selbst entdeckt oder eliminirt werden könnte. Bei den englischen Deklinatorien kommen außerdem noch andere Fehlerquellen vor, indem die Drehungsaxe des Spiegelchens nicht senkrecht zum Fernröhrchen, oder nicht parallel mit der Ebene des Spiegels, oder dieser selbst nicht genau planparallel sein kann etc.

Bei den Beobachtungen mit dem Inklinatorium fallen alle diese Fehlerquellen weg. In der That ist einleuchtend, daß dieses Instrument durch Hinzufügung des Fernröhrchens eigentlich ein vollständiger Theodolit wird. Dieser ist aber gewiß unter allen Instrumenten das geeignetste zur Bestimmung von Azimuthen. Ich verfahre dabei practisch so: das Fernröhrchen richte ich auf die Sonne und visire dieselbe so ein, daß sie beide Fäden tangirt (was man bei einiger Uebung im Nachfolgen durch eine der Mikrometerbewegungen mit großer Genauigkeit erreichen kann), und lese für die Stellung, bei welcher dieses Statt fand, beide Kreise ab. Dann drehe ich das Instrument um 180° , schlage das Fernrohr durch, und stelle wieder in gleicher Weise ein, jedoch so, daß die Sonne beide Fäden im scheinbar gegenüberstehenden Quadranten (z. B. rechts-unten, wenn vorher links-oben) berührt — wenn auch nur für einen Moment —, und lese

wieder ab. Die Mittel aus den entsprechenden Ablesungen geben dann *direct* die Höhe der Sonne und ihr Instrumental-Azimuth genau für einen und denselben Augenblick. Aus der Höhe berechne in dann *direct*, mit Umgehung der Zeit, das wahre Azimuth und kann dann das wahre Azimuth jeder beliebigen Mire leicht ermitteln. Größere Sicherheit wird man erlangen, wenn man diese Operation Vor- und Nachmittags ausführt.

Hierbei kann die Zeitbestimmung oder die Ablesung der Uhr keinen Fehler verursachen. Man braucht gar keine Uhr, am wenigsten einen genau regulirten Chronometer. Man bedarf auch keines Gehilfen. Der etwaige Fehler in der Horizontalität der Höhen-Axe wird durch das Umdrehen und Kippen des Fernrohrs vollständig eliminirt, ebenso die übrigen Instrumentalfehler, wenn solche vorhanden seyn sollten.

Es unterliegt also wohl keinem Zweifel, daß die Azimuthbestimmung mittelst des modificirten Inklinatoriums weit sicherer und zugleich auch leichter und einfacher ist, als nach der seither üblichen Methode. Dazu kommt aber noch die größere Bequemlichkeit auf Reisen, denn man braucht weder ein Chronometer, noch Spiegelsextant oder Reflexionskreis, noch Deklinatorium. Aus demselben Grund sind denn auch die Kosten bedeutend geringer.

Aber auch die Inklinationsbestimmung selbst hat ihren Vortheil von dem hinzugefügten Fernröhrchen. Die zu denselben erforderliche Orientation ist — wie oben schon bemerkt — mittelst des Fernröhrchens viel genauer und schneller zu erreichen als durch die Vertikal-Stellung der Nadel. Zudem aber hat man durch dasselbe eine Versicherung gegen azimuthale Verschiebungen während der Operation. Es kommt sehr leicht vor, daß das Instrument einen kleinen Stoß bekommt, sei es durch die Hand, welche oft ohne die Hilfe des Auges an dem Instrument thätig ist, sei es durch den Wind, welcher das geöffnete Thürchen unsanft zuschlägt, oder durch andere Ursachen.

Bei der gewöhnlichen Methode der Inklinationmessungen nun hat man gar kein Mittel um sich über den ungeänderten Stand des Instruments zu versichern, sondern man muß, um sicher zu gehen, die ganze bereits gemachte Operation wiederholen. Mittelst des Fernröhrchens dagegen kann man durch Vergleichung mit dem zu Anfang notirten Azimuth einer beliebigen Mire nicht nur über die etwaige Verrückung sich vergewissern, sondern man kann diese auch mit aller erwünschten Genauigkeit *messen*, und das Instrument sogleich wieder in die frühere Stellung zurückführen.

Außerdem ist, wie schon bemerkt wurde, das mit dem Fernröhrchen versehene Inklinatorium thatsächlich ein vollständiger Theodolit. Man kann also mittelst desselben nicht bloß astronomische Azimuthe, sondern auch die Höhe der Gestirne, die geographische Breite des Ortes etc. mit ganz hinreichender Genauigkeit bestimmen, nebstdem auch noch viele geodätische Operationen, Nivellirungen, trigonometrische Höhenmessungen u. s. w. damit ausführen. Das Inklinatorium würde also dadurch in der That einiges Recht auf den Namen eines Universal-Instrumentes haben, da mit demselben *alle* magnetischen Elemente bestimmt und sehr viele astronomische und geodätische Operationen ausgeführt werden können.

Bei alledem kostet aber ein solches Instrument noch bei weitem nicht so viel, als eines der in Deutschland gebräuchlichen Inklinatorien, welches nur die Inklination angiebt, oder als etwa das Gambey'sche Deklinatorium, welches nur die Deklination zu messen gestattet, oder als ein Lamont'scher Theodolit, welcher bei allen sonstigen vortrefflichen Eigenschaften, doch in seiner gewöhnlichen Form eigentlich kein einziges der drei magnetischen Elemente *absolut* angiebt. Ein englisches Inklinatorium von John Dover kostet nämlich 25 Pfund Sterling, und mit der Vorrichtung für die Lloyd'sche Intensitätsbestimmung 30 Pfund Sterling. Bei meinem gegenwärtigen Instrument habe ich auch den Horizontal-

kreis
bewe
Kreis
lass
fast
ment
der
Betr
mich
Bar
lich

(A
gel

D
keit
hun
wei
Zeit
am
Da
die
Für

sch
unv
jed
unz

kreis mit silbernem Limbus von schiefer Stellung mit beweglichen Lupen und doppelten Nonien, und beide Kreistheilungen von 30" directer Ablesung anfertigen lassen, so daß es mit dem Fernröhrchen im Ganzen auf fast 35 Pfund Sterling zu stehen kommt. Dieß Instrument ist so vortrefflich gearbeitet, daß die Excentricitäten der Nonien und der Theilung zusammen nirgends den Betrag von 12" erreichen. Fortgesetzte Messungen haben mich überzeugt, daß diese Dover'schen Instrumente den Barrow'schen auch in Betreff der Leistungen beträchtlich überlegen sind.

(Schluß im nächsten Heft.)

IV. *Die Thermo-Elektricität;* *von Prof. P. G. Tait.*

(Abkürzung einer im Senathause zu Cambridge am 23. Mai 1873 gehaltenen Vorlesung. Auf Wunsch des Herrn Verfassers aus der „Nature“ Vol. VIII. übersetzt.)

Die große Idee von der Erhaltung oder Unzerstörbarkeit der Kraft, — ausgesprochen vor einem Paar Jahrhunderten von Newton in einem kurzen Scholium (so weit der Zustand der experimentellen Wissenschaft seiner Zeit ihm dieß erlaubte), bündig festgestellt für die Wärme am Ende des vorigen Jahrhunderts von Rumford und Davy, und ausgedehnt auf alle andern Kraftformen durch die glänzenden Untersuchungen von Joule — bildet das Fundament der neueren Physik.

Gerade wie in den Augen der Chemiker jede chemische Veränderung nur eine Umstellung unzerstörbarer und unveränderlicher Materie ist, ebenso ist dem Physiker jede physische Aenderung nichts als eine Umwandlung unzerstörbarer Kraft, und so kann das ganze Ziel der

Physik, so weit wir es wenigstens kennen, bezeichnet werden als das Studium der möglichen Kraft-Umwandlungen mit ihren Bedingungen und Begrenzungen, so wie der gegenwärtigen Formen und Vertheilung der Kraft im Universum, mit ihrer Vergangenheit und Zukunft.

Erfahrungsmäßig ist gefunden, daß gewisse Kraftformen leichter oder vollständiger als andere verwandelbar sind, und so sprechen wir von höheren und niederen Formen und werden geführt zu der ungemein wichtigen Betrachtung der Degradation, oder, wie man gewöhnlicher sagt, der Dissipation der Kraft. Die Anwendung mathematischer Schlußfolgerungen auf die Erhaltung der Kraft bietet keine speciellen Schwierigkeiten dar, welche zu Newton's Zeiten bis zu einem gewissen Grade noch nicht überwunden waren, aber ganz anders verhält es sich mit den Umwandlungen der Kraft. Und wäre es nicht durch die im Jahre 1824 von Sadi Carnot entdeckten, wundervoll originellen Processe geschehen, würden wir möglicherweise nur einen kleinen Bruchtheil der Fortschritte erlangt haben, welche die Wissenschaft seit den letzten dreißig Jahren gemacht hat.

Zur Umwandlung der Wärme müssen wir Körper von verschiedener Temperatur haben. So wie Wasser kein „Haupt“ („head“) hat, wenn es nicht über den Meeresspiegel erhoben worden, so kann auch Wärme keine Arbeit thun, wenn sie nicht begleitet ist von einer Ueberführung aus einem heißeren zu einem kälteren Körper. Carnot zeigte, daß wir, um über diesen Gegenstand zu urtheilen, *Kreisläufe* (Cycles) von Operationen haben müssen, an deren Ende die arbeitende Substanz genau wieder in ihren anfänglichen Zustand versetzt ist. Und er zeigte auch, daß die Probe einer *vollkommenen* Maschine (d. h. der besten, die selbst theoretisch erreichbar ist) einfach darin besteht, daß sie *umkehrbar* seyn muß. Mit diesem Ausdruck meinen wir nicht bloß rückkehrend, wie im populären Sinne des Wortes, sondern etwas viel höheres, d. h. daß wenn die Maschine direct arbeitet,

während Wärme aus einem heißen Körper in einen kalten abgelassen wird, sie umgekehrt denselben Betrag von Arbeit leistet, wenn dieselbe Menge Wärme aus dem kalten Körper in einen warmen gepumpt wird. Da eine umkehrbare Maschine (theoretisch wenigstens) aus jeglicher arbeitenden Substanz construirt werden kann, und da alle umkehrbaren Maschinen unter ähnlichen Umständen arbeiten, so müssen sie äquivalent zu einander seyn (weil jede so gut ist, wie eine Maschine seyn kann), so ist klar, daß die Arbeitsgröße die unter gegebenen Umständen aus einem gegebenen Betrage von Wärme ableitbar ist (d. h. der Betrag der möglichen Umwandlung) nur abhängen kann von den Temperaturen der angewandten heißen und kalten Körper. In diesem Sinne sprechen wir von Carnot's Temperatur-Function, welche mit seinem Namen ebenso unvergänglich verknüpft ist, wie das dynamische Wärme-Aequivalent mit dem von Joule.

Auf diesem Werk von Carnot fortbauend, hat Sir W. Thomson zuerst eine *absolute* Definition von Temperatur gegeben, d. h. eine von den Eigenschaften jeder besonderen Substanz unabhängigen Definition. Vielleicht giebt es keinen Ausdruck im ganzen Bereich der Wissenschaft, dessen Sinn so wenigen wissenschaftlichen Männern richtig bekannt wäre, als das gemeine Wort Temperatur. Ich glaube, es ist keine Uebertreibung, wenn ich sage, daß bis jetzt nicht sechs Bücher veröffentlicht sind, in welchen er nur angenähert mit Richtigkeit ausgedrückt wäre. Die Form, in welcher er zuletzt aus den Händen von Joule und Thomson hervorging, befähigt uns, die Gesetze der Kraft-Umwandlung aus der Wärme-Form folgendermaßen hinzustellen.

1. Eine gegebene Wärmemenge ist äquivalent einer definitiven Umwandlung.

2. Aber nur ein Bruchtheil dieser Wärme kann selbst durch eine vollkommene Maschine umgewandelt werden; und dieser Bruch ist *definirt* als das Verhältniß des wirk-

lichen Sinkens der Wärme zu dem ihr möglichen, wenn wir Körper erhalten und anwenden könnten, welche absolut frei wären von Wärme.

Diese Definition hat zwei große Vorzüge. Erstens: der äußerste Betrag von Arbeit, welcher unter irgend welchen Temperatur-Umständen aus Wärme erlangt werden kann, wird genau durch dasselbe Gesetz bestimmt, wie das, welches die Arbeit angiebt, die unter ähnlichen Niveau-Umständen vom Wasser zu erhalten ist. In diesem Fall entspricht das Meeres-Niveau dem, was absoluter Nullpunkt der Temperatur genannt wird. [Es ist hier wohl zu bemerken, daß es die Potential-Energie des Wassers und nicht die Quantität desselben ist, welche der Wärmemenge in dieser Analogie entspricht. In dieser einfachen Bemerkung haben wir Alles, was nöthig ist, um Carnot's Schlüsse zu berichtigen, so weit sie irrig waren durch seine Annahme von der Materialität (und folglich Unzerstörbarkeit) der Wärme.]

Zweitens. Temperaturen, so definirt, entsprechen, wie Thomson und Joule durch ausführliche Versuche gezeigt haben, sehr nahe mit denen, welche vom Luftthermometer angegeben werden, und der absolute Nullpunkt liegt ungefähr 274 Centigrade unter dem Gefrierpunkt des Wassers. Ich habe diese Digression gemacht, weil ich das Wort Temperatur häufig gebrauchen muß und ich es immer in diesem Sinn gebrauchen werde.

Der Gegenstand der Thermo-Elektricität schließt natürlich alle von der Wärme abhängigen elektrischen Effecte ein, allein in gegenwärtiger Vorlesung werde ich mich auf die Wärme-Erzeugung in einer Kette von zwei Metallen beschränken.

Die Umwandlung der Wärme in die Kraft eines elektrischen Stroms wurde von Seebeck in den Jahren 1820 und 21 entdeckt. Sein Aufsatz über diesen Gegenstand (Abhand. d. Berlin. Akad. u. Pogg. Annal. VI.) ist besonders interessant, weil er die ganze Geschichte seiner Versuche zur Erlangung eines Volta'schen Stroms aus

einer Kette von zwei Metallen ohne Flüssigkeit sowie der Schritte giebt, durch welche er zu der Ansicht geführt wurde, daß Wärme das wirksame Agens zur Erzeugung der erhaltenen Ströme sey. In dieser Abhandlung giebt Seebeck die relative Ordnung einer großen Anzahl von Metallen und Legirungen, eine sog. thermo-elektrische Reihe, und zeigt, daß bei allmäliger Steigerung der Temperatur *verschiedene Aenderungen in dieser Ordnung* auftreten.

In einer Note zu dieser Abhandlung erkennt Seebeck an, daß ihm in seiner fernerer Entdeckung Cumming zuvorgekommen sey¹⁾ (und wirklich scheint dieser die Entdeckung der Thermo-Elektricität unabhängig gemacht zu haben.) Cumming zeigte, daß, wenn Drähte von Kupfer, Gold u. s. w. langsam mit Eisen erhitzt werden, die Ablenkung zuerst bis zu einem Maximum steigt, dann sinkt und bei Rothgluth sich *umkehrt*.

[Der Verf. zeigt Seebeck's ursprüngliches Experiment und Cumming's Erweiterung desselben.]

Sie sehen, daß wenn eine der Verbindungsstellen des Kupfer-Eisens in der Temperatur des Zimmers gehalten, und die andere allmählig erhitzt wird, ein Strom entsteht, dessen Intensität langsam bis zu einem Maximum steigt, dann schneller und schneller abnimmt, bis sie zuletzt Null wird und nun in *entgegengesetzter* Richtung wieder erscheint. Wir sind noch weit unter dem Schmelzpunkt des Kupfers, aber eine fernere Erhitzung erhöht den Effect nur wenig. Der Grund hiervon wird aus einigen That-sachen hervorgehen, die am Ende dieser Vorlesung ange-führt werden sollen. Im Moment des Maximalstroms sind die beiden Metalle thermo-elektrisch *neutral* gegen einander.

- 1) Seebeck sagt in seiner Abhandlung: Am Stabeisen hat Herr Cumming, welcher meine thermo-magnetischen Versuche aufgenommen und seinerseits weiter verfolgt hat, zuerst ein doppeltes Verhalten gegen Zink wahrgenommen. Von Cumming's Versuchen scheint es übrigens keine ältere Notiz zu geben als die vom Juni 1823 in den *Ann. of Phil. New Series*, Vol. v. 427. P.

Im vorliegenden Fall ist die Temperatur ungefähr 280 C.

Seebeck ermittelte, daß Wismuth und Antimon (zu deren Wahl er durch eine sehr sonderbare Reihe von Argumenten geführt wurde) am weitesten in der Reihe aus einander ständen, und deshalb bei geringen Temperatur-Differenzen große Effecte gäben. Dieß hat man zur Construction der thermo-elektrischen Säule benutzt, welche, verbunden mit einem hinreichend empfindlichen Galvanometer, bei weitem das empfindlichste Thermometer ist, welches wir kennen. Es hat neuerdings Astronomen in Stand gesetzt, die vom Monde und selbst von den helleren Fixsternen zu uns gelangende Wärme zu entdecken und zu messen. In den geschickten Händen von Forbes und Melloni ist dieß Instrument das wirksame Mittel zum Erweise der Identität der Wärme- und Lichtstrahlen geworden, ein Fortschritt, der, in Betreff der Vereinfachung der Wissenschaft, ebenso wichtig ist, als die Entdeckung der Magneto-Elektricität, und durch Forbes noch dadurch vervollständigt wurde, daß es ihm gelang, strahlende Wärme zu polarisiren.

Wenn wir indessen diese Frage unter dem Gesichtspunkt der Kraftumwandlung ins Auge fassen, haben wir zu fragen, *wo* ist die Absorption und *wo* das Ablassen (letting-down) der Wärme, von welchen die Entwicklung des Stroms betrachtet als Ursprung der Kraft herrührt. Sehr merkwürdig giebt uns ein Versuch von Peltier wenigstens eine theilweise Antwort. Peltier zeigte, daß, wenn eine gegebene Metallverknüpfung bei Erhitzung einen Strom von gewisser Richtung liefert, die Einschaltung eines Batteriestroms von derselben Richtung in diese (anfänglich eine gleichförmige Temperatur besitzende) Kette eine *Abkühlung* jener Verbindungsstelle bewirkt, während der umgekehrte dieselbe erwärmt. Betrachtet die Umstände, unter welchen sie gemacht wurde, ist diese Beobachtung und die daraus gezogene Folgerung eine der außerordentlichsten experimentellen Entdeckungen,

die je gemacht ist. Lenz brachte durch den Peltier'schen Versuch Wasser zum Gefrieren.

Hier haben wir demnach einen umkehrbaren Wärme-Effect, und dieß erlaubt den Schluß, daß die Gesetze der Thermodynamik hier anwendbar sind; obwohl vermöge der Natur des Versuchs der umkehrbare Effect immer begleitet seyn muß von nicht-umkehrbaren, z. B. Wärmeverlust durch Leitung und Wärme-Erzeugung durch den Widerstand in der Kette. Die letztere ist in thermo-elektrischen Ketten gewöhnlich klein, der erstere kann aber groß seyn.

Aus den schönen Versuchen von Magnus ist bekannt, daß durch ungleiche Erwärmung einer homogenen Kette, wie ungleich auch der Querschnitt seyn mag, keine thermo-elektrische Wärme erzeugt werden kann, — ein negatives Resultat von höchster Wichtigkeit. Sir W. Thomson, dem wir die erste und vollständigste Anwendung der Thermodynamik auf unseren Gegenstand verdanken, zeigte, daß das Daseyn eines neutralen Punktes nothwendig das Daseyn eines anderen umkehrbaren Effects, außer dem Peltier'schen bedinge. Und selbst, wenn der Querschnitt variierte, zeigte das eben erwähnte Magnus'sche Resultat, daß dieser nur in einer Fortführung der Wärme durch den Strom zwischen Portionen desselben Metalls von verschiedener Temperatur bestehen könne. Thomson's Schlußfolge ist sehr einfach, und zwar folgende: Gesetzt die Temperatur der heißeren Verbindungsstellen sey die des neutralen Punkts, so findet daselbst keine Absorption oder Entwicklung von Wärme statt; allein es giebt eine Entwicklung von Wärme an der kälteren Stelle und vermöge des Widerstandes in der ganzen Kette. Die Kraft, welche dieses leistet, muß die der Wärme seyn, entweder in dem einen oder in beiden der getrennten Metalle. Allein Schlüsse dieser Art, obwohl sie beweisen, daß ein solcher Effect vorhanden ist, überlassen es directen Experimenten zu entscheiden, was die

Natur und der Betrag dieses Effectes in jedem der Metalle für sich seyn werde. Durch eine ausgedehnte Reihe sinnreicher Versuche hat Thomson das Daseyn einer Fortführung der Wärme durch den Strom erwiesen und (sonderbar genug) von entgegengesetzten Zeichen in den ersten zwei Metallen (Eisen und Kupfer), welche er untersuchte. In seinen eigenen Worten: „Glasige Elektrizität führt Wärme mit sich in einem erhitzten kupfernen Leiter und harzige Elektrizität thut es in einem ungleich erhitzten eisernen Leiter.“ Diese Angabe ist nicht leicht zu verstehen. Verständlicher wird sie vielleicht in folgender Form: In Kupfer sucht ein Strom von positiver Elektrizität die Temperatur desjenigen Punktes, den er in irgend einem Augenblick durchläuft, gleichzumachen der des Punktes, welchen er eben verlassen hat, d. h. wenn er vom Kalten zum Heißen geht, sucht er den ganzen Leiter abzukühlen; während er, wenn er vom Heißen zum Kalten geht, ihn erwärmt, sich somit wie eine wirkliche Flüssigkeit in einer unregelmäßig erhitzten Flüssigkeit verhält. Im Eisen sind die Effecte umgekehrt und Thomson spricht demnach von der specifischen Wärme der Elektrizität, als sey sie positiv im Kupfer und negativ, im Eisen. Er entlehnt eine sehr merkwürdige Analogie aus der Bewegung des Wassers in einer endlosen Röhre (mit horizontalen oder vertikalen Armen) erzeugt durch Dichtigkeitsunterschiede, die von Temperaturdifferenzen herrühren. Hier spielt das Dichtigkeitsmaximum des Wassers eine vorwaltende Rolle. Neulich hat Neumann versucht, mittelst der Bewegungsgesetze der Flüssigkeiten und der ungleichen Ausdehnbarkeit der verschiedenen Metalle, eine physikalische Erklärung der thermo-elektrischen Ströme zu geben. Aber abgesehen davon, daß er die positive Elektrizität als eine wirkliche Flüssigkeit betrachtet, trifft seine Methode der Vorwurf, daß sie zur Erklärung des Peltier'schen oder des Thomson'schen Versuchs nichts beiträgt, und demnach nicht als nützlich für den Gegenstand betrachtet werden kann. Aehnliches

gilt von einem Versuche Avenarius' die thermo-elektrischen Ströme zu erklären, durch die Veränderung der elektrostatischen Differenz der Potentiale mit der Temperatur an den Contactpunkten der verschiedenen Metalle.

Mittelst der Thermosäule, statt der von Thomson gebrauchten Thermometer, hat kürzlich Le Roux den Betrag der specifischen Wärme der Elektrizität in verschiedenen Metallen gemessen und gezeigt, daß sie im Blei sehr klein ist oder ganz fehlt. Seltsam genug, obwohl er Thomson's Resultate bestätigt, nimmt er doch nicht gänzlich die Schlüsse an, durch welche derselbe zu deren Vorhersagung und Entdeckung geführt wurde.

Eine der glücklichsten Ideen Thomson's hinsichtlich dieses Gegenstandes ist die Construction seines sogenannten thermo-elektrischen Diagramms. In seiner frühesten Form bestand es bloß aus parallelen Columnen, deren jede die Namen einer Anzahl von Metallen enthielt, geordnet nach einer thermo-elektrischen Reihe für eine besondere Temperatur. Linien, welche die Orte des Namens von jedem Metall in den verschiedenen Columnen verbanden, zeigten an, wie sie ihren Ort unter den Metallen bei Steigerung der Temperatur veränderten. Thomson sprach es deutlich aus, was durch Vervollkommnung des Diagramms zu erreichen sey, liefs es aber bei dieser vorläufigen Skizze bewenden. Die Wichtigkeit der Idee ist jedoch sehr groß; denn wenn das Diagramm sorgfältig gezeichnet wird, giebt es uns, wie wir sehen werden, nicht nur die relativen Stellungen der Metalle bei verschiedenen Temperaturen mit den Temperaturen ihrer neutralen Punkte, sondern auch graphische Repräsentationen der specifischen Wärme der Elektrizität in jedem Metall, ausgedrückt durch die Temperatur, ferner den Betrag des Peltier'schen Effects und die elektromotorische Kraft (sowie deren Richtung) einer Kette aus irgend zwei Metallen bei gegebenen Temperaturen ihrer Verbindungsstellen. Kurz, das Studium des ganzen Gegenstandes kann auf eine nach Experimenten sorgfältig

ausgeführte Zeichnung des thermo-elektrischen Diagramms zurückgeführt werden, und die Bestätigung der thermodynamischen Theorie von Thomson wird dann bewirkt werden durch eine directe Bestimmung entweder der Peltier'schen Effecte oder der specifischen Wärme der Elektrizität bei verschiedenen Temperaturen und deren Vergleichung mit den entsprechenden Angaben des Diagramms.

Das Diagramm ist so construirt, daß die Abscissen absolute Temperaturen vorstellen, und der Unterschied der Ordinaten der Linien für je zwei Metalle bei gegebener Temperatur die elektromotorische Kraft einer Kette aus diesen Metallen ist, wenn eine der Verbindungsstellen einen halben Grad über, und die andere einen halben Grad unter dieser Temperatur liegt.

Aus dem, was folgt, wird man sehen, daß nur eine directe Messung des Werthes der specifischen Wärme der Elektrizität bei verschiedenen Temperaturen uns die wirkliche Form der irgend ein Metall repräsentirenden Linie geben kann; allein wenn die Linie für irgend ein Metall gegeben ist, so folgt die Form aller übrigen aus dem eben beschriebenen Proceß der Ordinaten-Differenzen. So wird es gut seyn damit anzufangen, die Abscissen-Axe als die Linie für ein besonderes Metall zu nehmen (z. B. Blei, in Folge des Le Roux'schen Resultats). Und wenn dieß in Zukunft eine Veränderung erleiden müßte, so würde eine complexe abschneidende Bewegung (shearing motion) des Diagramms parallel der Ordinatenaxe gleichzeitig alle Linien in ihre rechte Form versetzen.

Thomson's theoretische Untersuchungen lassen sich folgendermaassen in sehr einfacher Form aufstellen: — Denken wir uns zwei Metalldrähte an dem einen ihrer Enden erhitzt, und an den kalten Enden vereint, und dann zur Kette geschlossen durch ein verschiebbares Stück oder einen verschiebbaren Ring, der immer so gestellt wird, daß er von beiden Metallen Punkte verbindet, die gleiche Temperatur haben; sey dann E die elektromotorische Kraft,

Π der Peltier'sche Effect, und σ_1, σ_2 die specifische Wärme der Elektrizität in beiden Metallen. Wenn nun das verschiebbare Stück bewegt wird von Punkten von der Temperatur t zu anderen von der Temperatur $t + dt$, so ist das erste thermo-dynamische Gesetz ausgedrückt durch die Gleichung

$$dE = J (d\Pi + (\sigma_1 - \sigma_2) dt)$$

und das zweite durch

$$o = d\left(\frac{\Pi}{t}\right) + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{t} dt.$$

Diese Gleichungen zeigen sogleich, daß wenn keine elektrische Fortführung von Wärme stattfände, oder sie in beiden Metallen von gleichem Betrage wäre, der Peltier'sche Effect immer proportional der absoluten Temperatur wäre, und die elektromotorische Kraft proportional der Temperaturdifferenz der Verbindungsstellen seyn würde, so daß es da in keinem Fall einen neutralen Punkt gäbe. In der That würden die Linien in dem Diagramm für alle Metalle parallel werden, und in der ersteren der beiden Hypothesen, parallel der Abscissenaxe.

Eliminirt man $\sigma_1 - \sigma_2$ zwischen den beiden Gleichungen, so kommt

$$dE = J \frac{\Pi}{t} dt.$$

Vermöge der Construction des Diagramms ist nun $\frac{dE}{dt}$ die Differenz der Ordinaten der Linien für die zwei Metalle bei der Temperatur t . Was also auch die Form der Linien für zwei Metalle seyn mag: Der Peltier'sche Effect an der Verbindungsstelle von der Temperatur t ist immer proportional dem Areal des Rechtecks, dessen Basis die Differenz der Ordinaten ist, und dessen gegenüberstehende Seite ein Theil der Ordinatenaxe ist, die dem absoluten Nullpunkt der Temperatur entspricht. Diefs Areal wird immer kleiner, je mehr wir uns dem neutralen Punkt nähern, und wechselt das Zeichen (d. h. wird umgekehrt), wenn wir denselben überschreiten. Vorausgesetzt

ist, daß in jedem Fall der Strom aus demselben der beiden Metalle zu dem anderen gehe.

Die elektromotorische Kraft selbst, als Integral von $\frac{dE}{dt}$ zwischen den Temperaturgränzen, ist proportional dem Areal zwischen den Linien der beiden Metalle und den Ordinaten gezogen zu entsprechenden Temperaturen der respectiven Verbindungsstellen.

Die zweite der vorstehenden Gleichungen zeigt uns ferner, daß der Unterschied der specifischen Wärmen in den beiden Metallen proportional ist der absoluten Temperatur und dem Unterschiede der Tangenten der Neigungen der Linien für beide Metalle gegen die Abscissenaxe. Nehmen wir an, diese Axe sey die Linie eines Metalls, in welchem die elektrische Fortführung von Wärme gänzlich fehlt, so wird das Maas dieser Fortführung in einem andern Metall einfach das Product der absoluten Temperatur in die Tangente der Neigung ihrer Linie gegen die Axe. Wenn sonach die thermo-elektrische Linie für ein Metall gerade ist, so ist die elektrische Fortführung in demselben immer proportional der absoluten Temperatur, und sie ist positiv oder negativ je nachdem die Linie im ersten oder im vierten Quadranten ins Unendliche übergeht. Wenn die Linien für irgend zwei Metalle gerade sind, und die eine Verbindungsstelle in constanter Temperatur erhalten wird, so ist die elektromotorische Kraft eine parabolische Function der Temperatur der anderen Verbindungsstelle; der Scheitel der Parabel wird bei der Temperatur des neutralen Punkts der beiden Metalle liegen, und die Axe wird parallel seyn der Ordinatenaxe.

Zum Nutzen derer unter meinen Zuhörern, die nicht vertraut sind mit mathematischen Ausdrücken, will ich ein Beispiel, das numerisch genau ist, geben. Man nehme Zeit für Temperatur, d. h. Jahre für Grade. Repräsentiren die Ordinate des einen Metalls die Einnahme einer Person, die des anderen ihre Ausgabe. Der Unterschied dieser Ordinaten repräsentirt den Anwuchs ihres Capitals

oder der zurückgelegten Ersparnisse, welche hier für elektromotorische Kraft stehen. So lange die Einnahme die Ausgabe übersteigt, wächst das Capital; wenn Einnahme und Ausgabe gleich werden, d. h. an einem „neutralen Punkt,“ bleibt das Capital unverändert, in diesem Fall einen Maximalwerth anzeigend; dann in folgenden Jahren übertrifft die Ausgabe die Einnahme und das Capital schwindet.

Geleitet von Betrachtungen über Zerstreuung (Dissipation) der Kraft, wurde ich vor einigen Jahren auf die Hypothese geführt, daß die specifische Wärme der Elektricität, gleich dem thermischen und elektrischen Widerstand, direct proportional seyn müsse der absoluten Temperatur. Wenn dieß der Fall ist, würden die Linien in dem Diagramm für alle Metalle gerade; und Parabeln würden die graphische Repräsentation nicht nur der elektromotorischen Kraft, sondern auch des Peltier'schen Effects in Ausdrücken der Temperatur einer Verbindungsstelle. Und durch wirkliche Messung der nach Versuchen entworfenen Curven fand ich, daß innerhalb des Bereichs der Quecksilberthermometer, die Curven der elektromotorischen Kraft irgend zweier Metalle, wie Eisen, Kadmium, Zink, Kupfer, Silber, Gold, Blei und einiger andern, Parabeln seyen mit verticalen Axen. Die Abweichungen von Parabeln waren in keinem Falle größer als die unvermeidlichen Beobachtungsfehler und die Abweichung der Quecksilberthermometer von absoluten Temperaturen. Wenn nun die Linie für irgend eins dieser Metalle, innerhalb dieser Temperaturgränzen gerade ist, so sind es auch die für alle übrigen. Dieß macht das Zeichnen des Diagramms innerhalb dieser Gränzen zu einer sehr einfachen Sache. Eine leichte Bestätigung liefert die Thatsache, daß wir aus den Parabeln für die Metalle *A* und *B*, und *A* und *C* Linien für *B* und *C* ziehen können, wenn wir für *A* irgend eine Linie annehmen; und wir können dann die Temperatur der Intersection dieser Linien vergleichen mit der direct gefundenen des

neutralen Punkts von *B* und *C*. Andere Bestätigungen liefern die Tangenten der Winkel, unter welchen diese Parabeln die Abscissenaxe schneiden, denn die Summe von zwei derselben muß in jedem Fall gleich seyn der dritten.

In der That nehmen wir, übereinstimmend mit dem oben Gesagten, an

$$\sigma_1 = K_1 t, \sigma_2 = K_2 t,$$

wo K_1 und K_2 Constanten sind, so geben Thomson's Formeln zugleich

$$\frac{\Pi}{t} = -f(K_1 - K_2) dt$$

oder

$$\Pi = (K_1 - K_2) (T_{1,2} - t) t$$

wo $T_{1,2}$ (die Constante der Integration) einleuchtend die Temperatur des neutralen Punktes ist.

Auch

$$\begin{aligned} E &= J \int \frac{\Pi}{t} dt = J (K_1 - K_2) \int (T_{1,2} - t) dt \\ &= J (K_1 - K_2) (t - t_0) \left(T_{1,2} - \frac{t + t_0}{2} \right) \end{aligned}$$

wo t_0 die Temperatur der kalten Verbindungsstelle ist. Diefs ist die schon erwähnte parabolische Formel.

Verglichen mit der durch Beobachtung gegebenen Parabel erhalten wir die Werthe von $K_1 - K_2$ und $T_{1,2}$. Aehnlicherweise erhalten wir $K_1 - K_3$ und $T_{1,3}$. Folglich können wir $K_2 - K_3$ und (durch die zweite der obigen Gleichungen) den Werth von $T_{2,3}$ berechnen aus der Relation

$$(K_1 - K_2) T_{1,2} + (K_2 - K_3) T_{2,3} + (K_3 - K_1) T_{1,3} = 0.$$

So haben wir die vorhin angedeuteten Mittel der Verification, denn die oben geschriebene Gleichung drückt die Relation zwischen den Tangenten der Winkel aus, unter welchen die drei Parabeln die Abscissenaxe schneiden.

[Es ist zu bemerken, dafs, wenn die Kette aus einem und demselben Metall besteht, wir haben

$K_1 = K_2$; $T = \infty$, ($K_1 - K_2$) $T = \tau$ angenommen,
woher

$$H = \tau t,$$

was zeigt, daß die elektrische Fortführung der Wärme als ein Infinitesimalfall von Peltier's Effect zwischen anliegenden Portionen eines und desselben Metalles bei infinitesimal differenten Temperaturen betrachtet werden kann.

Nach derselben Hypothese haben wir auch

$$E = J \tau (t - t_0),$$

was übereinzustimmen scheint mit gewissen Versuchen des Herrn Durham, bei welchen sich die Ablenkung, die durch Berührung des warmen und kalten Endes eines selben Drahts entstand, sich proportional dem Unterschiede der Temperaturen ergab, unabhängig von der wirklichen Temperatur eines jeden.]

Bemüht, die Untersuchung auf Temperaturen jenseits des Bereichs der Quecksilberthermometer auszudehnen, arbeitete ich lange Zeit mit einem kleinen Luftthermometer, dessen Princip mir Dr. Joule angegeben hatte. Allein dieß involvirte große experimentelle Schwierigkeiten, herrührend hauptsächlich von der chemischen Action bei hohen Temperaturen. Nach vielen unbefriedigenden Arbeiten entschloß ich mich, die eine der thermo-elektrischen Verbindungen die Rolle des Thermometers spielen zu lassen, indem ich die Angaben der anderen beobachtete. In der That ergibt sich aus den vorstehenden Formeln ein ungemein elegantes Resultat, wenn wir annehmen, die spezifische Wärme der Elektrizität sey proportional der absoluten Temperatur in jedem von vier Metallen und dann eine Curve ziehen, deren Ordinaten und Abscissen die gleichzeitigen galvanometrischen Angaben von Paaren dieser Metalle sind, mit den kalten und heißen Verbindungen respective bei denselben Temperaturen. Denn, wenn τ der Unterschied der absoluten Temperatur an den Verbindungsstellen ist, so haben wir

$$x = A\tau + B\tau^2,$$

$$y = C\tau + D\tau^2,$$

wo die vier Constanten abhängen von der Natur der Metalle und von der absoluten Temperatur an der kalten Verbindungsstelle. Diese Gleichungen geben:

$$(Dx - By)^2 = (CB - AD)(Cx - Ay),$$

welches die Gleichung einer andern Parabel ist, die auch durch den Anfangspunkt geht, aber mit ihrer Axe nicht mehr vertikal.

Einen einfachen Beweis von diesem Theorem liefert die Bewegung eines Projectils im Vacuo. Gesetzt ein Theilchen bewege sich unter dem Einfluß der Schwere und einer anderen, einer gegebenen Horizontallinie parallelen, constanten Kraft, so wird sein Weg sowohl in Ordinaten als Abscissen parabolische Functionen der Zeit haben. Allein dieser Weg kann auch gefunden werden, wenn man die beiden Accelerationen zu einer componirt, und da jede derselben constant ist in Größe und Richtung, so wird ihre Resultante dieselbe Eigenschaft haben, und so ist der resultirende Weg eine Parabel. Versuchend in dieser Weise eine Reihe Temperaturen bis hinauf zur Rothgluth, fand ich, daß, während einige Paare von Ketten vortreffliche Parabeln gaben, andere weit davon abblieben, zu weilen sogar Curven mit Punkten von entgegengesetzter Biegung gaben. Ich war auf dem Punkt zu den Luftthermometern zu greifen, als ich ersah, daß fast in jedem Fall, wo die Curve keine Parabel war, Eisen eins der angewandten Metalle war; und mit Hilfe einiger Platinlegirungen war ich im Stande, mir eine Idee von der wahren Ursache dieser Anomalie zu machen, und sie späterhin durch eine unabhängige Methode zu bestätigen. Die Ursache ist die: daß während, wie Thomson entdeckte, die specifische Wärme der Elektricität im Eisen bei gewöhnlicher Temperatur *negativ* ist, sie bei gewisser Temperatur nahe der dunklen Rothgluth *positiv* wird und positiv bleibt, bis nahe zum Schmelzpunkt des

Eisens, wo es nach einigen meiner Versuche möglich erscheint, daß sie abermals das Zeichen wechselt. So geht die Linie des Eisens, welche in gewöhnlichen Temperaturen gerade ist, hinab vom ersten bis zum vierten Quadranten, um dann in dem ersten wieder zu steigen.

Um auf unsere Analogie zurückzukommen: Eine durch die Eisenlinie repräsentirte Einnahme ist eine solche, die eine Reihe von Jahren hindurch stetig abnimmt, ein Minimum erreicht, und nun wieder stetig wächst. Wenn dieses von einer steten Ausgabe begleitet ist, so werden die Schwankungen des Capitals abhängen von den comperativen Werthen der Ausgabe und dem Minimum der Einnahme. Wenn die Ausgabe kleiner ist als die Minimum-Einnahme, so wird das Capital wachsen langsamer und langsamer, bis zu einem gewissen Punkt, dann schneller und schneller; es wird keinen stationären Punkt geben, wohl aber einen Punkt von entgegengesetzter Biegung. Wenn die Ausgabe genau gleich ist der Minimum-Einnahme, so wird der Punkt der entgegengesetzten Biegung auch ein stationärer. Wird die Ausgabe größer als die Minimum-Einnahme, so wird das Capital ein Maximum, dann folgt ein Punkt der entgegengesetzten Biegung und darauf ein Minimum. Maximum und Minimum sind die stationären Punkte, die den beiden Fällen entsprechen, in welchen die Ausgabe der Einnahme gleich ist.

Der letztere Theil dieser Angaben zeigt sich gut in dem Verhalten von Ketten aus Eisen und verschiedenen Legirungen von Platin mit Iridium, Nickel und Kupfer.

In allen diesen Fällen giebt es offenbar wenigstens zwei neutrale Punkte. Gesetzt nun die beiden Verbindungsstellen seyen erhoben respective zu der Temperatur dieser beiden neutralen Punkte, so haben wir einen thermo-elektrischen Strom, der *gänzlich* von der specifischen Wärme der Elektrizität unterhalten wird, da einleuchtend ist, daß an keiner der Verbindungsstellen eine Absorption oder eine Entwicklung von Wärme stattfindet. Nehmen wir ferner an (wie es bei einer der von mir un-

tersuchten Legirung wirklich *sehr nahe* der Fall ist), daß die spezifische Wärme der Elektrizität in dem mit Eisen verknüpften Metall Null ist, so haben wir die merkwürdige Thatsache *eines Stroms unterhalten in einer Kette ohne Absorption oder Entwicklung von Wärme an einer der Verbindungsstellen oder in einem der Metalle, wohl aber mit Entwicklung von Wärme in einem Theile des zweiten Metalls und Absorption in dem andern Theil.* Diefes erregt unmittelbar die Idee, daß das Eisen über eine gewisse Temperatur erhitzt, gleichsam ein anderes Metall werde. Möglicherweise steht es im Zusammenhange mit dem Ferricum und Ferrosium der Chemiker, mit der Veränderung der magnetischen Eigenschaften des Eisens und seines elektrischen Widerstandes in hohen Temperaturen. Dr. Russel setzte mich gütigst in den Stand, diese Eigenschaften an einem von Matthiessen dargestellten reinen Eisen zu bestätigen. Aehnliche Erscheinungen finde ich am Nickel bei viel niedrigeren Temperaturen.

Die Methode der Controle, welche ich anwandte, um mich zu überzeugen, daß diese Eigenthümlichkeiten vom Eisen herrühren und nicht von den Platinlegirungen, erfordert eine kleine Erläuterung. Sie beruht auf der Thatsache, daß wir mit Hülfe zweier Metalle, die zu einem doppelten Bogen geschlossen worden (Drähte von den beiden werden neben einander ausgestreckt, ohne sich zu berühren, ausgenommen an den Enden), jede Portion des Feldes zwischen den Linien für diese beiden Metalle untersuchen können bloß durch Veränderung des Widerstands-Verhältnisses in den beiden Theilen des doppelten Bogens. Solch eine complexe Vorrichtung giebt eine Linie, welche durch die Intersection der Linien beider Bestandtheile geht, und, was ihre Lage betrifft, von den relativen Widerständen derselben abhängt. Ich will Sie hier nicht quälen mit der Formel, welche die Linie für den Bogen in Ausdrücken des Widerstandes beider Metalle und ihrer Linien giebt, sondern einfach die Versuche zeigen mit Hülfe eines Gold- und eines Palladium-

drahts, von denen der eine die specifische Wärme der Elektrizität positiv und der andere negativ besitzt, während ihr neutraler Punkt beträchtlich unter der Temperatur des Zimmers liegt. Zwischen diesen Linien ist die besondere Portion der Eisenlinie eingeschlossen, und wenn wir aus dem neutralen Punkt des Goldes oder Palladiums gleichsam Schüsse in verschiedenen Richtungen auf sie machen (making shots at it, as it were), werden wir im Stande seyn ihr Verhalten zu studiren.

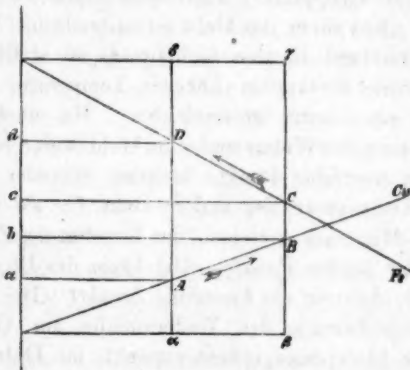
Ich habe hier Drähte von Eisen, Gold und Palladium zusammengebunden an dem einen Ende, das ihre heiße Verbindung seyn mag. Ein Ende des Galvanometers ist vereint mit dem freien Ende des Eisendrahts, das andere schleift längs einem Kupferdrahte, welcher die freien Enden des Gold- und Palladiumdrahtes verknüpft. Verschiebe ich dasselbe gegen eins von ihnen, so verringere ich den Widerstand dieses Zweiges des Doppelbogens und vergrößere den des anderen, d. h. gebe diesem Zweige des Doppelbogens die größere Wichtigkeit in der Combination.

Bringe ich den größeren Theil des Widerstandes in den Palladiumzweig, so finde ich einen neutralen Punkt bei mäßiger Temperatur, kann aber einen zweiten nicht erreichen, ohne nicht das Gold zu schmelzen. Bringe ich mehr Widerstand in den Goldzweig, so stellt sich der erste neutrale Punkt bei höherer Temperatur als zuvor ein, allein ein zweiter ist erreichbar. Bei noch weiterer Vergrößerung des Widerstandes im Goldzweige nähern sich die beiden neutralen Punkte langsam einander, der eine steigt in Temperatur, der andere sinkt, bis sie zuletzt ein Maximum-Minimum erreichen, das Resultat des Zusammenfließens der beiden Punkte. Die Linie des Doppelbogens ist nun so, daß sie die Eisenlinie *berührt*. Bei noch weiterer Vergrößerung des Widerstandes im Goldzweige finden wir bloß einen Inflexionspunkt; die Galvanometer-Angaben sind während des Erhitzens der Verbindungs-

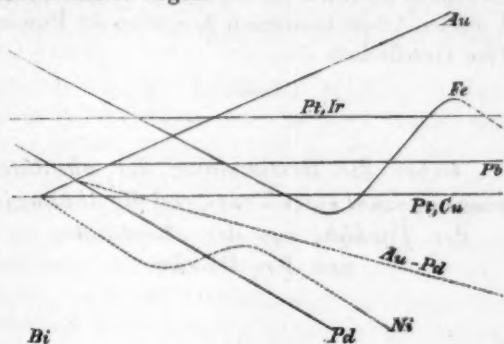
stelle beständig *gestiegen*, obwohl in einem verzögerten, und dann beschleunigten Maasse.

Zwei der Platinlegirungen, welche ich mit Eisen anwandte, schienen Linien zu geben, die der des Bleis fast genau parallel sind, d. h. in welchen die specifische Wärme der Elektrizität practisch *Null* ist. Bildet man aus diesen Legirungen eine Kette, so hängt also der Strom bloß von den Peltier'schen Effecten an den Verbindungsstellen ab und ist beinahe proportional dem Unterschiede ihrer absoluten Temperaturen, somit ein sehr passendes Thermometer zur approximativen Schätzung hoher Temperaturen liefernd. Ich bin gegenwärtig damit beschäftigt, das thermo-elektrische Diagramm in Gliedern von Temperaturen, wie sie durch diese Combination gegeben werden, zu zeichnen, und die Reduction zu absoluten Temperaturen wird endlich bewirkt durch einen Vergleich dieses temporären und sehr bequemen Maasses mit einem Luftthermometer.

Zusatz. Die folgende rohe Skizze eines Theiles des thermo-elektrischen Diagramms wird vielleicht einige der vorhergehenden Bemerkungen verständlicher machen. Sie ist bloß zur Erläuterung qualitativer Effecte gezeichnet.



Das folgende Diagramm zeigt den Betrag des Thomson'schen und des Peltier'schen Effects, sowie der elektromotorischen Kraft einer Kupfer-Eisenkette, wenn die Temperaturen beider Verbindungsstellen unter der des neutralen Punktes liegen.



Peltier's	{	an d. kalten Stelle	=	Areal $B D d a$ (b. Erhitzen)
Effect.		" " heißen "	=	" $B C c b$ (b. Erkalten)
Thomson's	{	in Kupfer	=	" $A B \beta \alpha$ ("
Effect.		" Eisen	=	" $D C \gamma \delta$ ("
Elektromot. Kraft			=	" $A B C D$

Die Pfeile zeigen die Richtung des Stroms, und Euclid's Proposition vom Parallelogramm über die Diagonale eines Parallelogramms zeigt zugleich die Anwendung des ersten Gesetzes der Thermodynamik auf die Figur, da die elektromotorische Kraft, zusammen mit dem Peltier'schen Effect an der kalten Verbindungsstelle, offenbar gleich sind der Summe der beiden Thomson'schen Effects und des Peltier'schen Effects an der heißen Stelle.

Nehmen wir ferner an, die Linien AD , BC lägen sehr dicht aneinander, so erhalten wir, da immer $AD = \frac{\pi}{t}$,

$$(BC - AD)t = td \left(\frac{\pi}{t} \right) = -(\sigma_1 - \sigma_2) dt,$$

dessen Anwendung auf das zweite Gesetz einleuchtend

ist. Der Leser wird selbst leicht Diagramme für andere Fälle der Relation von Temperaturen der Verbindungsstellen zu der des neutralen Punkts entwerfen können.

Thomson's ursprünglicher Aufsatz findet sich in den Transactions of the Royal Society of Edinburgh und weiteres Detail meiner Arbeit in neueren Nummern der Proceedings derselben Gesellschaft.

V. Ueber die Bestimmung der absoluten Schwingungszahl eines Tones und die Abhängigkeit der Tonhöhe von der Amplitude; von Fr. Poske.

§. 1.

Die bisher bekannten Methoden zur Ermittlung der Schwingungszahl von Stimmgabeln und andern tönenden Körpern lassen sich im Wesentlichen in drei Gruppen einteilen, welche man als graphische, akustische und optische bezeichnen kann.

Die graphischen Methoden¹⁾, wenngleich die directesten, sind doch als die rohesten zu betrachten, schon aus dem Grunde, weil sie die erste Bedingung des Experiments, die Isolirung der zu beobachtenden Erscheinung von störenden Nebeneinflüssen, nicht nur nicht erfüllen, sondern derselben sogar grade entgegen handeln. Die Länge und Elasticität des an der einen Zinke der Gabel befestigten Schreibstiftes (etwa Glasfadens), der grössere oder geringere Druck desselben gegen die vorüberbewegte Fläche, das stärkere oder schwächere Mitschleifen auf derselben, die Dicke der Rufsschicht und Unebenheiten in der Ober-

1) W. Weber in Schilling's musikal. Lexikon, Art. „Akustik“, 1830. Duhamel's Vibrograph (*L'Institut*, 1840, p. 19 und 41), vervollkommt von Wertheim und König; Scott's Phonautograph, in *Cosmos* XIV, 314; vgl. Berliner Berichte 1859.

fläche selbst scheinen die Genauigkeit der Resultate wesentlich zu beeinträchtigen, und in der That machen sorgfältige Versuche, welche nach der wohl genauesten Methode dieser Art, mit Hülfe einer an einem Pendel befestigten Glasplatte angestellt sind, keinen grösseren Anspruch als den, bis auf ungefähr 0,5 Procent zuverlässig zu seyn.

Unter den speciell akustischen Methoden ist am bekanntesten die Benutzung einer Sirene¹⁾, welche mit der zu untersuchenden Stimmgabel bis zu einem solchen Grade angenäherter Consonanz gebracht wird, daß die entstehenden Schwebungen bequem gezählt werden können. Doch ist es selbst unter der Hand geschickter Experimentatoren sehr schwierig, den Ton der Sirene längere Zeit constant zu erhalten; auch tritt der Uebelstand hinzu, daß bei dem nothwendigen wiederholten Anstreichen der Stimmgabel zwar keine sprungweise Aenderung der Phase eintritt, wohl aber während des Anstreichens eine geringe Verstimmung der Gabel sich bemerklich macht, die mit Hülfe von Lissajous' Vibrationsmikroskop leicht beobachtet werden kann. Es ist einleuchtend, daß die Summation dieser kleinen Differenzen im Laufe einer grösseren Beobachtungsperiode gleichfalls das Endresultat bis zu einem gewissen Grade zu beeinflussen vermag. Eine andere Bestimmung der Schwingungszahl mittels des Monochords, durch Messung der Saitenlänge und Benutzung der theoretischen Formel für die Schwingungsdauer, ist der Natur der Sache nach keiner grossen Genauigkeit fähig, ebenso wenig die erste Methode von Scheibler²⁾, nach welcher die Verlängerung gemessen werden muß, die eine Saite zu erfahren hat, um mit einer vorher consonanten Stimmgabel etwa 4 Schwebungen per Secunde zu geben. Am genauesten von allen bisher bekannten Methoden ist wohl das zweite Verfahren von Scheibler, bei welchem ein

1) Cagniard Latour, *Annales de chimie etc.* Tome XII et XVIII; Pogg. Ann., Bd. VIII und X.

2) Röber in Dove's Repertorium, Bd. III, und Pogg. Ann., Bd. 32. Poggendorff's Annal. Bd. CLII.

bekanntes musikalisches Intervall (etwa eine Octave) durch eine große Zahl von Hülfsgabeln in so kleine Zwischenräume zerlegt wird, daß die Schwebungen zwischen je zweien bequem gezählt werden können. Addirt man alle Differenzen, so erhält man den Gesamtunterschied der Schwingungszahlen beider vorgelegten Gabeln; aus diesem und dem Verhältniß der beiden Töne lassen sich die absoluten Schwingungszahlen unmittelbar berechnen. Diese Methode ist indess augenscheinlich äußerst mühsam und erfordert eine große Zahl von Hülfsgabeln; ihre Genauigkeit wird dadurch beschränkt, daß eine große Zahl von Beobachtungen zu machen ist, deren Fehler sich in dem Endresultat summiren; auch bedürfen die Versuche einer erheblichen Zeit, innerhalb welcher sich Temperaturänderungen schon nicht unerheblich bemerkbar machen können, und in der That weichen auch die Messungen der *a*-Stimmgabel bis zu 0,126 Doppelschwingungen in der Secunde von einander ab.

Unter den optischen Mitteln zur Bestimmung der Schwingungsdauer ist das Lissajous'sche Vibroscop an erster Stelle zu nennen, das indessen zunächst nur der relativen Bestimmung der Schwingungszahlen zweier nahezu harmonischen Gabeln dient und diesen Zweck mit großer Genauigkeit erfüllt. Von Lissajous selbst rührt auch eine sinnreiche Anwendung des Instruments zur Ermittlung der absoluten Tonhöhe her, die auf folgendem Princip beruht¹⁾: hat man neben der Mikroskopgabel *M* zwei andere *A* und *B*, die zu ihr in nahezu gleichem, einfachen Verhältniß stehen und von einander nur um wenige Schwingungen abweichen, so kann man durch Vergleichung von *M* mit *A* und *B* und durch Zählung der Schwebungen zwischen *A* und *B* drei Gleichungen aufstellen, in denen nur die drei Schwingungszahlen als Unbekannte vorkommen. Die nach dieser Methode von Lissajous angestellten Messungen an einer Gabel von c. 64 Schwingungen wei-

1) Melde, Lehre von den Schwingungscuren, p. 181.*

che
ein
Bes
der
A.
hin
gew
sika
duin
strie
um
zwe
glei
Hül
die
vers
The
stell
wich
die
Skal
stim
der
dem
am
luter
nen
von
digk
Fehl
sehr
oper
schw
der

1) c

chen jedoch um mehr als 0,3 Doppelschwingungen von einander ab, und geben daher auch nur eine angenäherte Bestimmung.

Auf einer Verbindung von Lissajous' Methode mit derjenigen von Scheibler beruht ein neuerlich von A. Terquem¹⁾ vorgeschlagenes Verfahren, das darauf hinausgeht, eine Zahl von Mikroskopgabeln, die mit Laufgewichten versehen sind und ein großes Gebiet der musikalischen Skala beherrschen, ein für alle Mal zu graduiren. Zu diesem Zwecke sind die Gabeln mit Theilstrichen versehen, so daß eine Verschiebung der Gewichte um 1 Theilstrich einer Aenderung der Tonhöhe um ca. zwei Schwingungen entspricht. Die Gabel wird mit einer gleichschwingenden, auch mit Laufgewichten versehenen Hülfs-gabel zunächst consonant abgestimmt, während sich die Gewichte am Anfang der Theilung befinden. Dann verschiebt man letztere auf der Mikroskopgabel um einen Theilstrich, zählt die Schwebungen mit der Hülfs-gabel, stellt dann beide wieder auf Consonanz ein, rückt die Gewichte um einen neuen Theilstrich weiter, zählt gleichfalls die Schwebungen, und so fort, bis man an's Ende der Skala gelangt ist. Zum Schluß vergleicht man die Endstimmung der Hülfs-gabel nach Lissajous' Methode mit der Anfangsstimmung der Mikroskopgabel und kann aus dem Verhältniß und der Differenz der Schwingungszahlen am Anfang und Ende der Beobachtungsreihe deren absoluten Werth berechnen. Das Verfahren erfordert anscheinend einen weniger complicirten Apparat als die Methode von Scheibler, leidet aber gleichfalls an der Nothwendigkeit, viele Beobachtungen machen zu müssen, deren Fehler sich summiren. Die Graduierung ist auch kaum sehr zuverlässig, da an den Gabeln viel mit der Hand operirt werden muß, wobei Temperaturschwankungen schwerlich vermieden werden können. Auch die Aenderung der Tonhöhe der Mikroskopgabel mit der Amplitude (vgl.

1) *Comptes rend.* Janvier 12, 1874. *Philos. magazine*, March 1874.

§ 5) bringt eine gewisse Unsicherheit in die Beobachtungen, die sich mit der Zahl der letzteren vergrößert. Ueberhaupt scheint es nicht rathsam eine feste Skala aufstellen zu wollen, an welcher man jede beliebige Tonhöhe durch Vergleichung sofort ablesen kann, da es, abgesehen von Temperaturdifferenzen, große, vielleicht unüberwindliche Schwierigkeit hat, die Laufgewichte wieder absolut genau und mit derselben Befestigung auf einen gewünschten Theilstrich einzustellen.

Endlich ist noch eine sehr sinnreiche Methode von Mach¹⁾ zu erwähnen, die auf dem Princip der stroboskopischen Wahrnehmung beruht, aber nur eine rasche Bestimmung ermöglichen will, ohne auf große Genauigkeit Anspruch zu machen.

Es dürfte demnach nicht ohne Werth seyn in dem Folgenden eine Methode anzugeben, welche mit ziemlich einfacher, rein optischer Beobachtungsweise eine äußerst große Genauigkeit verbindet.

§ 2.

Die Methode.

Bei jeder Bestimmung der absoluten Schwingungszahl, etwa an Stimmgabeln, kommt es schliesslich darauf an, dieselbe mit der astronomischen Uhr (resp. der Bewegung des Sekundenpendels) zu vergleichen. Da indessen beide Bewegungen von zu verschiedener Ordnung sind, um direct in Beziehung gesetzt zu werden, so liegt es nahe, nach einer anderen constanten Bewegung zu suchen, welche in der Mitte zwischen beiden steht. Eine solche bietet sich in der Rotation des von Helmholtz angegebenen und von Aloys Schuller in seiner brauchbarsten Form beschriebenen elektromagnetischen Rotationsapparats, dessen Drehungsgeschwindigkeit eine äußerst constante ist, und nach der von Schuller benutzten Methode bis in die vierte Decimale genau bestimmt wer-

1) Pogg. Ann. 1873, Bd. 150, p. 157.

den kann¹⁾. Der wesentliche Theil derselben besteht in einem- Centrifugalregulator, welcher durch Verringerung des Contacts die Stromstärke vermindert, sobald die Rotationsgeschwindigkeit eine gewisse Grenze überschreitet.

Befinde sich nun an der einen Zinke einer Stimmgabel ein leuchtender Punkt (etwa ein Stärkekörnchen oder noch besser ein minimales Quecksilbertröpfchen, das erfahrungsgemäß auf die Schwingungszahl der Gabel ohne irgend nachweisbaren Einfluß ist), und stellt man ein Mikroskop auf diesen Punkt ein, so erscheint derselbe zu einer leuchtenden Linie verlängert, wenn die Gabel in Schwingungen versetzt wird. Läßt man dagegen zwischen dem Objectiv des Mikroskops und dem schwingenden Punkt eine rotirende Scheibe mit einer gewissen Anzahl von Spalten hindurchgehen, so wird der Punkt zu ruhen scheinen, wenn die Anzahl der in einer Secunde vorübergehenden Spalten genau übereinstimmt mit der Schwingungszahl der Stimmgabel. Ist diese Uebereinstimmung nur angenähert, so macht der Punkt langsame Hin- und Hergänge, die den hörbaren Schwebungen entsprechen, und die man daher als „optische Schwebungen“ bezeichnen kann. Es ist klar, daß sich aus der Kenntniß der genauen Umdrehungsgeschwindigkeit, der Anzahl der Spalten und der Dauer der Schwebungen die Schwingungszahl der Versuchsgabel bis auf sehr kleine Bruchtheile genau berechnen läßt. Die Beobachtungen selbst haben den Vorzug, daß sie der Beihülfe des Gehörs völlig entbehren können, und wetteifern daher an Schärfe mit den Methoden der Optik. Allerdings muß die ungefähre Tonhöhe bekannt seyn, da der Punkt auch scheinbar ruht, wenn die Zahl der vorbeigehenden Spalten ein aliquoter Theil der Schwingungszahl ist; doch bietet eine solche rohe

1) Vgl. S. Exner in den Sitzungsbericht. der Wiener Akad., math. naturw. Kl. Bd. 58, 2 Abth. 1868.

Aloys Schuller, Ueber die Messung von Rotationsgeschwindigkeiten.

Pogg. Ann. Bd. 146.

Vorbestimmung, etwa nach der graphischen Methode, keine Schwierigkeit dar.

Es mag bemerkt werden, daß auch Töpler¹⁾ das Princip der stroboscopischen Scheiben zur optischen Analyse tönender Körper benutzt hat, ohne dasselbe indessen zur Bestimmung der Schwingungszahlen selbst anzuwenden.

§ 3.

Anordnung der Apparate.

Bei Ausführung der Beobachtungen wurde nicht direct die Versuchsgabel, sondern eine Lissajous'sche Mikroskopgabel angewandt, die zuvor durch Verstellung der Gewichte so abgestimmt war, daß die Schwingungszahlen beider sich wie 3:1 verhielten. Die Mikroskopgabel wurde in der von Helmholtz²⁾ angegebenen Weise durch eine gleichgestimmte galvanische Unterbrechungsgabel in constanter Schwingung erhalten; dieß bot den Vortheil, die optischen Schwebungen eine beliebig lange Zeit hindurch beobachten zu können, während das wiederholte Anstreichen der Gabel mit dem Bogen bei der Zusammensetzung der Apparate und der Art der Beobachtung Schwierigkeit gemacht hätte. Dazu kommt die Rücksicht auf die oben erwähnte geringe Aenderung der Schwingungszahl während des Anstreichens und auf die unten (§ 5) besprochene Abhängigkeit der Tonhöhe der Vibroskopgabel von der Amplitude. Der beim periodischen Oeffnen des Stroms entstehende Extracurrent wurde durch eine Zersetzungszelle mit verdünnter Schwefelsäure abgeleitet, die mit den beiden Seiten der Unterbrechungsstelle in Verbindung stand und so gut wirkte, daß es unnöthig wurde, die Oberfläche des Quecksilbers durch Alkohol vor dem Verbrennen zu schützen. Es ist ferner rathsam, die ganze Unterbrechungsgabel, die sich in einiger Entfernung von dem Rotationsapparat befindet, auf eine

1) Berliner Ber. 1866, pag. 100.

Pogg. Ann. Bd. 128, p. 108 und Bd. 141, p. 321.

2) Helmholtz, Tonempfindungen, p. 137, 185 und Beilage 8.

weiche Unterlage zu setzen und den Fuß des Quecksilbernäpfchens durch einen schweren Körper möglichst fest zu legen, um alles schädliche Klirren zu vermeiden. Die so erregte Gabel schwingt dann selbst durch lange Zeiträume vollkommen ruhig und gleichmäßig, und, wie zahlreiche Versuche zeigten, so gut wie constant.

Die Mikroskopgabel wurde nun oberhalb der horizontalen Scheibe passend angebracht, so daß sich das Objectiv dicht über den Spalten befand. Der leuchtende Punkt konnte bei dieser Anordnung völlig fest bleiben; er wurde durch ein Quecksilbertröpfchen hergestellt, das sich an der mit Ruß und Schellack geschwärzten Spitze eines Glasstäbchens unterhalb der rotirenden Scheibe befand. Durch Verschiebung des Glasstabes in dem Kork einer kleinen Glasflasche, die mit etwas Wachs auf dem Tisch befestigt war, konnte der Punkt sehr genau in die richtige Entfernung vom Objectiv eingestellt werden. Die Flamme, deren Bild in dem Tröpfchen den leuchtenden Punkt bildete, mußte aber möglichst weit von dem Rotationsapparate aufgestellt seyn, da sich die Feder des Regulators gegen Temperaturänderungen so empfindlich zeigt, daß erhebliche Schwankungen in der Rotationsgeschwindigkeit eintreten, wenn man diese Vorsicht außer Acht läßt. Das Licht einer kleinen Lampe wurde deshalb von ferne her durch eine Linse auf die Spitze des Glasstabes concentrirt und der Rotationsapparat außerdem durch einen Schirm vor der Wärmestrahlung möglichst geschützt.

Als rotirende Scheibe diente eine runde Glasplatte von ca. 24 cm. Durchmesser; die radial gerichteten Spalten (24 an der Zahl) wurden möglichst fein in eine einerseits glanzlose schwarze Papierscheibe geschnitten, und diese dann auf die Glasplatte so aufgeklebt, daß die Spalten sich ganz nahe dem Rande befanden. Man gebrauchte dabei die Vorsicht, das Papier vorher auf festes Zeichenpapier aufzuziehen, um eine ungleichmäßige Contraction beim Aufkleben zu verhindern. Auch war es nothwendig, daß

der Mittelpunkt der Kreistheilung genau in die Drehungsaxe fiel, da sonst periodische Schwankungen des leuchtenden Punktes eintraten. Der mittlere Theil der Papierbelegung wurde nachher wieder herausgelöst, um die genaue Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit zu ermöglichen. Das Princip derselben mag hier in Kürze angegeben werden, um die unten folgende Beobachtungstabelle verständlich zu machen.

Auf der Rotationsaxe befindet sich noch eine zweite Scheibe, die zur Hälfte aus rothem, zur Hälfte aus grünem Glase besteht und zum Theil mit schwarzem Papier bedeckt ist, so daß roth, grün, schwarz ungefähr zu gleichen Theilen vorhanden sind. Der ganze Apparat steht dicht vor dem Pendel einer astronomischen Uhr, welches einen kleinen Schirm mit einem Spalte trägt, der beim Durchgange durch die Gleichgewichtslage momentan hell beleuchtet wird, indem eine Linse mit Hülfe eines kleinen Spiegels das Bild einer schmalen Petroleumflamme auf ihm entwirft. Durch eine passende Combination von Spiegeln wird daher alle Secunden einmal ein Lichtstrahl durch die farbigen Glasplatten gesandt und von einem Fernrohr aufgenommen. Ruht die Scheibe oder macht sie in jeder Secunde eine ganze Zahl von Umdrehungen, so sieht man im Fernrohr in jeder Secunde einmal einen schmalen Lichtstreifen von derselben Farbe aufblitzen. Weicht dagegen die Umdrehungszahl um $\frac{1}{e}$ von einer ganzen Zahl ab, so fällt das Licht immer durch andere Stellen der Glasplatten und es tritt ein Farbenwechsel ein, der sich alle e Secunden wiederholt. Ist die angenäherte Umdrehungszahl aus der Stellung der Regulatorschraube bekannt, so ergiebt die Beobachtung von e die anzubringende Correctur, und die Aufeinanderfolge der Farben bestimmt das Vorzeichen derselben als positiv, wenn sie im Sinn der Farbenfolge bei der Drehung vor sich geht, als negativ im entgegengesetzten Falle. Liegt die Umdrehungszahl, wie bei den folgenden Versuchen, ungefähr in der Mitte zwischen zwei

ganzen Zahlen, so ist die Periode schwierig bestimmbar, da die Farben zu schnell aufeinander folgen. Es genügt aber in diesem Falle die farbigen Glasplatten zur Hälfte mit schwarzem Papier zu bedecken, so daß nur ein rother und ein grüner Quadrant übrig bleiben. Man sieht dann nur jede zweite Secunde einen Lichtstreifen aufblitzen und erkennt leicht, daß ϱ gleich der doppelten Wiederholung eines Farbenwechsels zu setzen ist. Dabei empfiehlt es sich, nicht die Farbenwechsel selbst, sondern die Zeitpunkte zu beobachten, in welchen statt der Dunkelheit zuerst ein farbiger Streifen aufleuchtet. Die Reihenfolge der Farben während einer ganzen Periode ϱ ist dann z. B. die folgende, wenn die linke Verticalreihe etwa für die ungraden, die rechte für die graden Secunden gilt:

grün-dunkel

— — —

grün-dunkel

roth-dunkel

— — —

roth-dunkel

dunkel-grün

— — —

dunkel-grün

dunkel-roth

— — —

dunkel-roth

(grün-dunkel).

Um die Dauer der optischen Schwebungen zu zählen, benutzt man am besten eine zu andern Zwecken am Apparat befindliche Vorrichtung; dieselbe besteht in einer leichten Feder, die durch einen an der Axe befestigten Excenter bei jeder Umdrehung einmal in ein Quecksilbernäpfchen gezogen wird: Dadurch wird jedesmal ein Strom geschlossen und geöffnet, der mit einem elektrischen Zählwerk in Verbindung steht. Schaltet man das letztere ein, während man die Schwebungen zählt, so giebt dasselbe die während der Beobachtungsdauer geschehenen Um-

drehungen an, aus denen sich mit Hülfe der Rotationszahl leicht die verflossene Zeit sehr genau berechnen läßt. Ist s die Dauer einer Schwebung, l die Zahl der in 1 Secunde vorbeigegangenen Spalten, so ist die Schwingungszahl der Gabel

$$m = l \pm \frac{1}{s}.$$

Ueber das Verzeihen entscheidet man leicht, indem man beobachtet, ob bei steigender oder sinkender Rotationsgeschwindigkeit die Zahl der Schwebungen wächst oder abnimmt. Es genügt dazu schon eine aufmerksame Betrachtung der Art, in welcher sich während einer Versuchsreihe mit den Schwankungen der Umdrehungsgeschwindigkeit die Schwebungsdauer verändert.

§ 4.

Resultate der Beobachtung.

Als Versuchsobject diente eine von König angefertigte und normale Gabel, deren Tonhöhe ursprünglich auf 326 Doppelschwingungen angegeben war. Die Reihenfolge der Beobachtungen war folgende:

I. Die Versuchsgabel (V.-G.) wurde nach der Lissajous'schen Methode mit der Mikroskopgabel (M.-G.) verglichen, die Deckungszeit τ zweier Gipfelpunkte der Klangfigur mit Hülfe eines $\frac{1}{3}$ sec schlagenden Metronoms bestimmt und festgestellt, welche von beiden Gabeln beschwert werden mußte, um den Werth von τ zu vergrößern.

II. Die M.-G. wurde, während sie ruhig zu schwingen fortfuhr, vom Stativ genommen und in die geeignete Stellung oberhalb der rotirenden Scheibe gebracht. Die Rotationsgeschwindigkeit war bei einem Vorversuche durch Verstellung des Regulators so fixirt, daß die optischen Schwebungen bequem gezählt werden konnten. Zur Ermittlung der Periodendauer ρ wurde eine große Zahl von Bestimmungen gemacht, indem man nach dem Vorgange von Gauss mit Unterbrechungen beobachtete und

die in der Zwischenzeit verflossene Zahl von Epochen berechnete. In der Pause zwischen 2 Sätzen wurden jedesmal 40 Schwebungen gezählt, und die während derselben gemachten Umdrehungen auf der elektrischen Uhr abgelesen. Die ungefähre Umdrehungszahl in 1^{sec} war 4,5; die Farbenfolge bei der Rotation war grün-roth, der Farbenwechsel im Fernrohr gleichfalls, die Correctur daher positiv; die unten angeführten Zeiten beziehen sich auf das erste Aufleuchten von grün am Anfang und in der Mitte jeder Periode.

III. Am Schlusse wurde die M.-G. nochmals mit V.-G. verglichen, um eine etwaige Aenderung der Schwingungsdauer während der Beobachtungen II. festzustellen.

Demnach ist eine Beobachtungsreihe die folgende:
I. $\tau = 60 \cdot \frac{1}{2}^{\text{sec}}$; M.-G. beschwert.

II.	Ordnungs- zahl.	Zeit.		Zwischen- zeit.	Uhrschläge während 40 Schweb- ungen.
		Min.	Sec.		
	0	33	59	} 54"	978
		34	24		
	1	..	53	} 54	
		35	18		
	2	..	47	} 54	
		36	12		
	3	..	41		
	8	41	13	} 54	
		..	38		
	9	42	7	} 54	
		..	32		
	10	43	1	} 54	
		..	26		
	11	..	55		
	15	47	41	} 56	956
		48	6		
	16	..	37	} 56	
		49	2		
	17	..	33	} 56	
		..	58		
	18	50	27		

Ordnungs- zahl.	Zeit.		Zwischen- zeit.	Uhrschläge während 40 Schwen- gungen.
	Min.	Sec.		
23	55	1	} 54	952
24	..	28		
24	..	55	} 54	
25	56	20		
25	..	49	} 56	
26	57	16		
26	5.	45		
30	1	21	} 54	996
31	..	48		
31	2	15	} 56	
32	.	42		
32	3	11	} 56	
33	.	38		
33	4	7		
38	8	43	} 56	958
39	9	8		
39	.	39	} 54	
40	10	4		
40	..	33	} 54	
41	11	0		
41	..	27		
45	15	15	} 56	930
46	..	40		
46	16	11	} 54	
47	..	38		
47	17	5	} 56	
48	..	30		
48	18	1		
53	22	31	} 54	958
54	..	56		
54	23	25	} 56	
55	23	52		
55	24	21	} 56	
56	24	48		
56	25	17		

III. $\tau = 50 \cdot \frac{1}{3}^{\text{sec}}$; M.-G. beschwert.

Die mittlere Dauer einer Periode ergibt sich danach:

$$\varrho = \frac{51' 18''}{56} = \frac{3078}{56} = 54 \text{ s } 96.$$

Daher die mittlere Rotationsgeschwindigkeit

$$4,5 + \frac{1}{54,96} = 4,5182,$$

und die Zahl der vorbeigegangenen Spalten:

$$l = 4,5182 \cdot 24 = 108,437.$$

Die mittlere Zahl von Uhrsclägen während 40 Schwebungen beträgt 961, während einer Schwebung daher

$$\frac{961}{40} = 24,025.$$

Da in 1^{sec} $2 \cdot 4,5182 = 9,036$ Uhrscläge geschehen sind, so folgt die Dauer einer Schwebung:

$$s = \frac{24,025}{9,036} = 2,66,$$

mithin die Schwingungszahl der M.-G.

$$m = 108,437 + 0,376 = 108,813.$$

Um endlich die Schwingungszahl n der Versuchsgabel zu finden, kennt man die folgende Relation (wenn $\frac{\mu}{\nu}$ das angenäherte ganzzahlige Verhältniß beider Schwingungszahlen ist)

$$\mu n - \nu m = \pm \frac{1}{2\tau},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem die Versuchs- oder Mikroskopgabel beschwert werden mußte, um größere Harmonie zu erreichen. In unserm Falle ist $\frac{\mu}{\nu} = \frac{1}{3}$, und als Mittel aus der Anfangs- und Endvergleichung

$$\tau = \frac{55''}{3} = 18'',3,$$

$$\text{daher } n = 3 \cdot 108,813 - 0,03 = 326,41.$$

Die Verschiedenheiten in der Zahl der Uhrscläge während 40 Schwebungen, die bei den einzelnen Beobachtungen ziemlich erheblich zu sein scheinen, rühren

hauptsächlich von kleinen Schwankungen der Rotationsgeschwindigkeit her, da geringe Temperaturänderungen trotz der angewandten Vorsichtsmaßregeln nicht ganz vermieden werden konnten. Die periodischen Schwankungen der Rotationsgeschwindigkeit vermöge der Thätigkeit des Regulators bewegen sich in so engen Grenzen, daß sie wohl kaum eine merkliche Unsicherheit in der Dauer der Schwebungen hervorrufen; dagegen dürfte die Wärmeabstrahlung des Beobachters während der Zählung der optischen Schwebungen auf die Feder des Regulators nicht ohne Einfluß sein. Gleichwohl kann man die gefundenen Zahlen bis auf 0,01 Schwingungen als genau ansehen, wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht, in welcher die Schwingungsdauern aus den einzelnen Beobachtungen unter Berücksichtigung der gleichzeitigen Rotationsgeschwindigkeit berechnet sind:

Gruppe	Mittel der Zeit	Rotations- geschw.	Schwe- bungs- dauer	m	n
0 bis 11	54,2	4,5184	2,"706	108,811	326,40
8 bis 18	55,4	4,5180	2,"64	108,812	326,41
15 bis 26	55,0	4,5182	2,"63	108,817	326,42
26 bis 30	54,0	4,5185	2,"75	108,808	326,39
30 bis 41	55,1	4,5181	2,"65	108,813	326,41
38 bis 48	55,8	4,5179	2,"57	108,818	326,42
45 bis 56	54,7	4,5183	2,"65	108,816	326,42
0 bis 56	54,96	4,5182	2,"66	108,813	326,41

Die größere Abweichung in der vierten Reihe ist wohl daraus zu erklären, daß während der Beobachtung der Schwebungen die Rotationsgeschwindigkeit grade ein Maximum erreichte, dem der gefundene Mittelwerth 4,5182 nicht ganz entspricht. Es scheint indessen nicht unmöglich, wenn es darauf ankommt, auch solche Schwankungen noch auf ein Minimum zu reduciren, da der Apparat, ganz sich selbst überlassen, noch in der 4. Decimale constante Rotationsgeschwindigkeiten liefert.

Die angeführte Bestimmung wurde bei 14° C. ausgeführt. Es ist nicht ohne Interesse den Einfluß der Temperatur zu beachten; zwei andere Versuchsreihen, an verschiedenen Tagen bei 10° C. aufgestellt, ergaben übereinstimmend die Zahl 326,47, also eine Abweichung von 0,06 Schwingungen, deren Sinn den Vermuthungen entspricht, die man von vorn herein über den Einfluß der Temperaturänderung haben kann. Es ist ersichtlich, daß größere Temperaturdifferenzen die Schwingungszahl bis in die Zehntel hinein modificiren können, und daß es daher wenig Werth hat, genaue Bestimmungen der Schwingungszahl ohne Angabe der Temperatur vorzunehmen. Uebrigens ist es nach der obigen Tabelle schon ausreichend, die Beobachtungen 10 Minuten lang fortzusetzen, um zu genauen Resultaten zu gelangen.

Es braucht kaum hinzugefügt zu werden, daß man auf diese Weise die Schwingungszahl jedes beliebigen tönenden Körpers bestimmen kann, indem man zunächst die Lissajous'sche Mikroskopgabel darauf einstellt und dann die Schwingungszahl derselben nach der auseinandergesetzten Methode aufsucht. Es dürfte auch keine Schwierigkeit machen, den schwingenden Körper direct unter die Spalten zu bringen und einen leuchtenden Punkt desselben mit einem beliebigen Mikroskop zu beobachten.

§ 5.

Abhängigkeit der Tonhöhe der Lissajous'schen Mikroskopgabel von der Amplitude.

Bei den Beobachtungen mit dem Vibroskop stellte sich eine eigenthümliche Veränderlichkeit der Schwingungszahl mit der Amplitude heraus, die für die Kenntniß des Instruments wie für die Theorie wichtig genug erschien, um näher studirt zu werden.¹⁾

War die M.-G. auf V.-G. ein wenig unterhalb des einfachen Verhältnisses 1:3 eingestellt, so trat bei Beob-

1) Die Thatsache ist bereits von Lissajous bemerkt, vgl. Ann. de Chim. (3) LI. p. 147.

achtung der Deckungszeit zweier Gipfelpunkte zuweilen die auffällige Erscheinung ein, daß die Figur in der Mitte zwischen zwei Deckungen plötzlich stehen blieb und dann in die frühere Lage zurückkehrte. Dies deutete darauf hin, daß während der Abnahme der Elongation die Stimmung beider Gabeln durch die vollkommene Consonanz hindurchging, und daß beide nachher im entgegengesetzten Sinne von einander abwichen. Vergleiche der Versuchsgabel mit der constant erregten Mikroskopgabel zeigten, daß bei unbeschwerten symmetrisch gearbeiteten Gabeln von größerer Masse wie die König'sche Gabel eine solche Abhängigkeit der Deckungszeit von der Amplitude nicht bemerkbar ist, und daß daher die obige Erscheinung hauptsächlich auf Rechnung der Mikroskopgabel kommt. Es war daher gestattet, um das Gesetz dieses Zusammenhanges zu studiren, die Schwingungszahl der V.-G. als vollkommen constant bei allen Amplituden zu betrachten, zumal die Schwingungen der auf einem Resonanzkasten stehenden und mäßig angeschlagenen Normalgabel im Vergleich zur Mikroskopgabel so langsam abnahmen, daß sich ihre Amplitude während einer der unten bezeichneten Beobachtungen nur innerhalb sehr enger Grenzen bewegte.

Zur genaueren Messung der Elongation wurde mittels eines unter 45° gegen das Ocular geneigten Planglases das Bild einer Skala in das Gesichtsfeld projicirt, und der zu beobachtende leuchtende Punkt auf den Nullpunkt der Theilung eingestellt. Darauf wurde die Mikroskopgabel kräftig angeschlagen und die Schläge eines Drittelsekunden angehenden Metronoms vom Augenblicke des Anschlags an gezählt, um den Vorübergang des einen Endes der leuchtenden Linie vor den einzelnen Skalentheilen fixiren zu können. Der Anschlag geschah bei allen Versuchen in möglichst gleicher Stärke, so daß die Dauer bis zum ersten beobachtbaren Vorbeigang (vor dem Theilstrich 10) in den einzelnen Reihen nicht wesentlich differirte, wovon man sich während der Beobachtungen selbst leicht überzeugen konnte. Das Mittel aus einer größeren Zahl von

(12)
Skal
blick

dafs
einer
Zeit
man
ange
Am
erste
Dec

und
pun
ken
folg
Mor
Po

(12) Observationen giebt folgende Tabelle, in welcher α Skalentheile, τ Drittelsekunden bedeutet, die vom Augenblick des Anschlags an gezählt sind:

I.

α		10	7	5	4	3	2	1
τ		9	19	28	35	43	54	74

Man erkennt aus dieser Zusammenstellung zunächst, daß die Amplituden auch bei der vorliegenden Gabel in einer geometrischen Reihe abnehmen. Interpolirt man die Zeiten für die nicht beobachteten Durchgänge, so findet man für die logarithmischen Decremente die im folgenden angegebenen Werthe. Dabei sind die mit * bezeichneten Amplituden direct beobachtet, die übrigen interpolirt; dem ersteren entsprechen die in der letzten Reihe befindlichen Decremente:

II.

Amplitude.	Zwischenzeit in Drittelsec.	logar.	Decrem.
*10) 3	0,035	} 0,036
9) 3	0,039	
8) 4	0,033	
*7) 4	0,038	} 0,037
6) 5	0,036	
*5) 7	0,032	
*4) 8	0,036	0,036
*3) 11	0,037	0,037
*2) 20	0,035	0,035
*1			

Danach wurden beide Gabeln gleichzeitig angeschlagen und die aufeinander folgenden Deckungszeiten der Gipfel-
punkte so lange beobachtet, als die Figur überhaupt noch
kenntlich war. Ein Mittel aus 10 solchen Reihen ist die
folgende, in der die erste Zahl die Metronomschläge vom
Moment des Anschlags bis zur ersten Deckung giebt.

III.

	τ_3	τ_4	τ_5	τ_2	τ_1	τ_0
(7)	11	12,3	14,2	16	18	20

Man bemerkt demnach eine stetige Zunahme der Deckungsdauer und da die V.-G. beschwert werden mußte, um τ zu vergrößern, so folgt zunächst, daß mit abnehmender Elongation die Schwingungszahl wächst, wie von vornherein zu erwarten war.

Aus dem Vergleich der aufgestellten Reihen ergibt sich ferner, daß den Mitten der verschiedenen Deckungszeiten ungefähr folgende Amplituden entsprechen:

IV.	τ	11	12,3	14,2	16	18	20
	α	8,8	5,85	3,65	2,1	1,2	(0,6)

Berechnet man nun die Schwingungszahlen nach der Formel:

$$3m = 326,41 - \frac{1}{2\tau},$$

wo τ ganze Sekunden bedeutet, so findet man:

V. Schwingungszahl.	Zugehörige Amplitude.
$m_5 = 108,758$	$\alpha_5 = 8,8$
$m_4 = 108,762$	$\alpha_4 = 5,85$
$m_3 = 108,768$	$\alpha_3 = 3,65$
$m_2 = 108,772$	$\alpha_2 = 2,1$
$m_1 = 108,775$	$\alpha_1 = 1,2$
$m_0 = 108,778$	$\alpha_0 = (0,6)$

Aus dem Vergleich der Schwingungszahlen und der zugehörigen Amplituden scheint unzweifelhaft zu folgen, daß die Aenderung der Schwingungsdauer der Mikroskopgabel nicht, wie beim Pendel, mit dem Quadrat der Amplitude, sondern nahezu mit der ersten Potenz derselben proportional ist. In diesem Falle hat man zu setzen:

$$T_r = T_0 (1 + p \alpha_r)$$

$$T_s = T_0 (1 + p \alpha_s)$$

$$\frac{T_r - T_s}{T_r - T_0} = \frac{m_r - m_s}{m_r - m_0} \cdot \frac{m_0}{m_r} = \frac{\alpha_r}{\alpha_s},$$

oder, da $\frac{m_r}{m_0}$ sehr wenig von 1 verschieden ist:

$$\frac{m_r - m_0}{m_r - m_s} = \frac{\alpha_r}{\alpha_s}.$$

Berechnet man nach diesem Schema die Verhältnisse der Schwingungsdifferenzen und die der entsprechenden Amplituden (wobei m , ohne Bedenken mit der zu α gehörigen Schwingungszahl identificirt werden kann), so ergibt sich, wenn r/s die Indices der jedesmal verglichenen Zahlen bedeutet:

r/s	$\frac{m_r - m_s}{m_s - m_o}$	$\frac{\alpha_r}{\alpha_s}$
5/4	1,25	1,50
5/3	2,00	2,41
5/2	3,33	4,19
5/1	6,66	7,33
4/3	1,60	1,60
4/2	2,66	2,79
4/1	5,33	4,88
3/2	1,66	1,74
3/1	3,33	3,04
2/1	2,00	1,75
	2,91	3,12

Die Zahlen weichen, wie das arithmetische Mittel zeigt, nach beiden Seiten hin um ziemlich gleichviel von der vorausgesetzten Gleichheit ab; ihre Uebereinstimmung konnte bei der Unvollkommenheit der ausgeführten Messungen nicht genauer erwartet werden, sie sprechen aber zum mindesten entschieden gegen eine Abnahme der Schwingungsdauer mit dem Quadrat der Amplitude, wie sie u. a. auch für schwingende Stäbe gültig zu sein scheint.¹⁾

Noch deutlicher wird das gefundene Resultat, wenn man die Constante p auf strengem Wege berechnet.

Setzt man dazu

$$n = n_o (1 + p\alpha_s + q\alpha_s^2)$$

und beachtet, daß die beobachteten Schwingungszahlen (n) die Mittelwerthe der factischen Schwingungszahlen während einer Deckungsperiode darstellen, so folgt

1) vgl. F. Braun, diese Ann. 1874, Heft I, II.

$$\bar{n} = \frac{\sum_{v=1}^v n_0 (1 + p \alpha_t e^{-n \varepsilon \Delta t} + q \alpha_t^2 e^{-2 n \varepsilon \Delta t}) \Delta t}{v \Delta t}$$

$$= n_0 \left(1 + p \frac{(\alpha_{t'} - \alpha_t)}{\varepsilon \tau} + q \frac{(\alpha_{t'}^2 - \alpha_t^2)}{2 \varepsilon \tau} \right),$$

wobei bedeuten

α_t die Amplitude am Anfange der Deckungsperiode,

$v \Delta t = \tau$ die Dauer einer Deckungsperiode,

$\alpha_{t'} = \alpha_t \cdot e^{-\varepsilon \tau}$ die Amplitude am Ende der Deckungsperiode.

Man erhält daher zur Berechnung von p und q

$$\left(\frac{\bar{n}}{n_0} - 1 \right) = p \frac{\alpha_{t'} - \alpha_t}{\varepsilon \tau} + q \frac{\alpha_{t'}^2 - \alpha_t^2}{2 \varepsilon \tau}.$$

Mit Hülfe des Werthes von $\varepsilon = 0,035$ findet man leicht aus Tabelle I und III die Amplituden, welche den Augenblicken der Deckung entsprechen.

α	τ	\bar{n}
10,7	11	108,758
7,3	12,3	108,762
4,7	14,2	108,768
2,8	16	108,772
1,7	18	108,775
0,85	20	108,778
0,4		

Wählt man die ersten beiden Schwingungszahlen zur Berechnung der Constanten, so darf ohne erheblichen Fehler $n_0 = 108,778$ gesetzt werden, und man erhält dann

$$\left. \begin{aligned} p &= -0,000.0311 \\ q &= -0,000.0011 \end{aligned} \right\}$$

Der Vergleichung halber mag noch eine zweite Beobachtungsreihe hier Platz finden:

V_a	Ordnungszahl.	τ	α	\bar{n}
		12,5	8,35	108,763
		15,1	5,0	108,770
		17,3	2,9	108,776
		20	1,5	108,778
		24	0,7	108,782

V_{Ia}	r/s	$\frac{m_r - m_0}{m_s - m_0}$	$\frac{\alpha_r}{\alpha_s}$
	4/3	1,58	1,67
	4/2	3,17	2,86
	4/1	4,75	5,56
	3/2	^o 2,00	1,73
	3/1	3,00	3,33
	2/1	1,50	1,93
		1,60	1,71

$$\left. \begin{aligned} p &= -0,000.027 \\ q &= -0,000.00077. \end{aligned} \right\}$$

Man erkennt aus den gefundenen Zahlen, daß der Werth von q sehr klein gegen den von p ist, und daß mithin in der That die Aenderung der Schwingungsdauer wesentlich von der ersten Potenz der Amplitude abhängt.

§ 6.

Verhalten unbeschwerter Gabeln.

Auch dünnere unbelastete Stimmgabeln zeigten mit abnehmender Amplitude geringe Veränderungen der Schwingungszahl, die sich ungefähr zwischen denselben Grenzen wie die oben angeführten bewegten. So wurde eine Stimmgabel von etwa 220 Schwingungen mit der constant schwingenden galvanischen Gabel verglichen, nachdem zuvor die Art der Abnahme der Amplitude durch Beobachtung des Vorbeiganges des schwingenden Punktes vor den einzelnen Skalentheilen wie oben bestimmt war.

Es trat hier der Uebelstand auf, daß das logarithmische Decrement trotz möglichst sicherer Befestigung der in einen eisernen Block eingeschraubten Gabel nicht constant war, sondern mit abnehmender Amplitude etwa auf die Hälfte des anfänglichen Werthes herabsank. Ferner verlor man den Vortheil der vorhergehenden Untersuchung, daß die Aenderungen der tieferen Mikroskopgabel beim Vergleich mit der constant schwingenden höheren Gabel in den Deckungszeiten verdreifacht zum Ausdruck gelangten; im Gegentheil konnten die Abnahmen bei der Gabel von 220 Schwingungen in den Schwingungsfiguren mit der galvanischen Gabel von 160 Schwingungen nur halbirt sichtbar werden. Aus diesen Gründen machen die folgenden Beobachtungsreihen keinen Anspruch auf die relative Genauigkeit der früheren; sie geben indessen einigen Anhalt zur Beurtheilung der Veränderung der Schwingungszahl.

Die Abnahme der Amplitude zeigt die folgende Zusammenstellung:

Amplitude in Skalen- theilen.	Zwischenzeit in Drittel- secunden.	logar. Decrement.
30—25	5	0,0364
25—20	8	0,0279
20—15	11	0,0261
15—10	17	0,0237
10—7	18	0,0209
7—5	16	0,0198
5—3	28	0,0182
3—2	23	0,0176
2—1	40	0,0173

Aus einer größeren Zahl von Beobachtungen der Deckungszeiten wurden diejenigen ausgewählt, bei denen die erste Deckung mit der Amplitude 30 zusammenfiel. Das Mittel aus denselben giebt die folgende Reihe, wenn α die den Mitten der Deckungszeiten entsprechende Amplitude bezeichnet:

α	τ	n
23	12,5	219,889
17	14,	219,902
12	14,5	219,906
	15,	
7,5	15,	219,909
	15,5	
4,8	15,5	219,912
	16,	
	16,	
3	16,	219,915
	16,	
	16,	
1	16,5	219,918

Man erkennt, daß die Schwingungszahlen mit sinkender Amplitude in ähnlicher Weise zunehmen, wie in der früheren Beobachtungsreihe. Eine rohe Vergleichung der Werthe von n mit den zugehörigen α ergibt auch hier dasselbe Resultat wie Tab. VI. des vorigen Paragraphen. Auf eine Berechnung der Constanten p und q mußte jedoch in diesem Falle wegen der unsicheren Abgrenzung der einzelnen Deckungsdauern vor der Hand verzichtet werden.

Die vorstehende Untersuchung wurde im hiesigen physikalischen Institut unter Leitung des Herrn G. R. Professor Kirchhoff ausgeführt, dem ich für seine lebenswürdige Unterstützung meinen wärmsten Dank ausspreche.
Heidelberg, 18. Mai 1874.

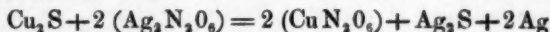
VI. *Notiz über das Verhalten des Halb-Schwefelkupfers gegen eine Auflösung von salpetersaurem Silberoxyd; von R. Schneider.*

Der Verfasser ist bei seinen neueren Arbeiten über Schwefelsalze auf die Frage nach dem Verhalten der Sulfurete des Kupfers gegen eine wässrige Lösung von salpetersaurem Silberoxyd geführt worden.

Was zunächst das Einfach-Schwefelkupfer betrifft, so scheint nach einer in Gmelin's Handbuch¹⁾ enthaltenen Angabe kein Zweifel darüber zu bestehen, daß dies Sulfuret sich mit salpetersaurem Silberoxyd einfach in Schwefelsilber und salpetersaures Kupferoxyd umsetzt nach der Gleichung

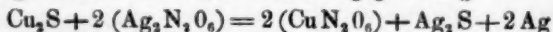


Ueber das Verhalten dagegen, welches Halb-Schwefelkupfer gegen Silbernitrat zeigt, hat Verfasser nirgends eine Angabe finden können. Zwar liefs sich mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, daß die beiden Verbindungen im Sinne der Zeichen



auf einander wirken würden; doch bedurfte diese Annahme des experimentellen Beweises. Verfasser glaubt diesen durch die folgenden Versuche geführt zu haben.

0,200 Grm. eines sehr reinen, zum feinsten Pulver zerriebenen Kupferglanzes wurden in einer mit Glasstöpsel verschließbaren Flasche mit einer titrirten Auflösung von salpetersaurem Silberoxyd (0,010 Grm. Ag. im CC) versetzt und durch anhaltendes Umschütteln des Flascheninhaltes die Einwirkung unterstützt. Sobald in einem kleinen Pröbchen der durch ruhiges Stehen geklärten Flüssigkeit — (dasselbe wurde auf eine Glasplatte dicht neben einem Tröpfchen Salzsäure so aufgetupft, daß beide Flüssigkeiten sich bei der Ausbreitung alsbald berührten) — kein Silber mehr nachgewiesen werden konnte, wurde von Neuem Silberlösung zugefügt und damit so lange fortgefahren, bis die geklärte Flüssigkeit auch nach längerer Zeit noch eine schwache Reaction auf Silber zeigte. Dies war der Fall, nachdem zusammen 54,5 CC Silberlösung zugefügt waren. Nach der Zersetzungsgleichung



hätten 54,32 CC. Silberlösung der angegebenen Stärke verbraucht werden sollen.

1) Bd. III, S. 394.

Die Lösung zeigte nach beendigter Reaction eine hellblaue Farbe; sie enthielt, abgesehen von dem geringen Ueberschuß an salpetersaurem Silberoxyd, nur salpetersaures Kupferoxyd; von Schwefelsäure war sie völlig frei. Der Bodensatz war ein dichtes, weißgraues, krystallinisch körniges Pulver, in dem sich hellere, schmutzig weiße von dunkeln schwarzgrauen Theilchen deutlich unterscheiden ließen.

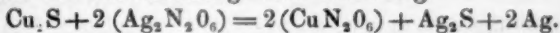
Dies Pulver wurde nach dem vollständigen Auswaschen im noch feuchten Zustande mit Salpetersäure vom spec. Gewicht 1,18 übergossen und einige Zeit damit bei gewöhnlicher Temperatur in Berührung gelassen: ein Theil — und zwar nur metallisches Silber — löste sich dabei unter Entwicklung von Stickstoffoxyd; ungelöst blieb ein gleichmäßiges schwarzes Pulver, welches das Verhalten des Schwefelsilbers zeigte.

a. Die erhaltene, salpetersaure Lösung gab, durch Salzsäure gefällt, 0,360 Grm. Chlorsilber, entsprechend 0,270 Grm. Silber.

b. Der schwarze, in Salpetersäure unlösliche Rückstand, der übrigens völlig kupferfrei war, hinterließ nach dem Rösten an der Luft und nach anhaltendem starken Glühen 0,272 Grm. Silber, dem nur eine Spur Eisenoxyd (von einem geringen Eisengehalte des Kupferglanzes herrührend) beigemengt war.

Der bei der Einwirkung des salpetersauren Silberoxyds auf Halb-Schwefelkupfer bleibende Rückstand ist demnach ein Gemenge von metallischem Silber und Schwefelsilber, und zwar beträgt die in dem entstandenen Schwefelsilber enthaltene Silbermenge nahezu ebensoviel wie die im metallischen Zustande abgeschiedene.

Dies Verhältniß entspricht, wie man bemerken wird, genau den Voraussetzungen der Gleichung



Diese erweist sich demnach als ein für die fragliche Reaction in jeder Beziehung zutreffender Ausdruck.

Berlin, im Mai 1874.

VII. *Bemerkung zu den meteorologischen
Notizen des Herrn Budde; von R. Clausius.*

Herr Budde hat in einem „Meteorologische Notizen“ überschriebenen Aufsatz¹⁾ auch eine frühere Arbeit von mir²⁾ besprochen, in welcher ich durch theoretische Betrachtungen zu dem Schlusse gelangt war, daß die Lichtreflexion in der Atmosphäre durch Dampfbläschen bewirkt werde.

Schon i. J. 1853, nachdem Brücke gegen meine Ansicht den Einwand erhoben hatte, daß auch andere trübe Medien, in welchen sehr kleine reflectirende Körperchen vorkommen, im reflectirten Lichte bläulich und im durchgehenden Lichte roth erscheinen, habe ich unter bereitwilliger Anerkennung des Gewichtes, welches diesem Einwande zukam, erklärt³⁾, meine mathematischen Betrachtungen beruhten auf der Voraussetzung, daß die reflectirenden Körperchen in der Atmosphäre groß genug seien, um nach den gewöhnlichen Gesetzen der Reflexion und Brechung zu wirken; sollten aber die Körperchen so klein sein, daß diese Gesetze auf sie keine Anwendung mehr fänden, so wären für diesen Fall auch meine Schlüsse ungültig. Nach dieser Erklärung hatte ich kein persönliches Interesse mehr mich an der Discussion dieser Frage zu betheiligen, und ich würde daher auch jetzt in dem Umstande, daß Herr Budde sich gegen das Vorhandensein von Dampfbläschen ausspricht, keinen Grund zu einer Erwiderung erblicken; da aber die Art, wie er meine Arbeit bespricht, zu dem Schlusse Veranlassung geben könnte, als ob meine mathematischen Entwicklungen falsch wären, so sehe ich mich doch genöthigt, einige Worte zur Erläuterung zu sagen.

1) Diese Ann. Bd. 150, S. 576.

2) Diese Ann. Bd. 76, S. 161.

3) Diese Ann. Bd. 88, S. 556.

Herr Budde sagt, durch den Druck, welchen das Wasserhäutchen eines Dunstbläschens durch seine Cohäsion auf die eingeschlossene Luft ausübe, werde diese letztere erheblich verdichtet, und das Bläschen könne daher in Betreff seiner Wirkung auf das Licht nicht mit einer dünnen Platte verglichen werden. Dann fährt er fort: „Das ganze Gebilde stellt eine Kugel dar, deren Brechungsindex von dem seiner Umgebung merklich abweicht. Es gehört demnach zu den Körpern, für welche Clausius berechnet, daß sie in der Atmosphäre nicht existiren können. (Man erinnert sich, daß Clausius seinen Beweis im zweiten Theile der Abhandlung ausdrücklich auch für solche Körper führt, deren Brechungsexponent von 1 außerordentlich wenig abweicht.)“

In dieser letzten Beziehung hat Hr. Budde mich mißverstanden.

Nimmt man an, die Reflexion des Lichtes in der Atmosphäre werde durch Dampfbläschen bewirkt, so erhält man von jedem Bläschen, welches von einem Strahle durchdrungen wird, eine bedeutende Menge reflectirten Lichtes, weil der Strahl viermal aus Luft in Wasser und aus Wasser in Luft übergehen muß, und somit vier Reflexionen von solcher Stärke erleidet, wie sie dem Uebergange zwischen zwei Medien von so verschiedener Dichtigkeit, wie Luft und Wasser, entspricht. Man braucht daher, um die ganze in der Atmosphäre stattfindende Lichtreflexion zu erhalten, nur eine geringe Anzahl von Dampfbläschen als vorhanden anzunehmen, nämlich bei heiterem Wetter etwa so viele, daß Lichtstrahlen, welche die Atmosphäre senkrecht durchdringen, auf diesem ganzen Wege nur je Ein Bläschen treffen.

Nimmt man dagegen statt der Bläschen solide Kugeln an, so finden beim Durchdringen einer solchen nur zwei Reflexionen statt, und setzt man ferner an die Stelle des Wassers einen Stoff, dessen Brechungsexponent weniger von 1 abweicht, so werden auch die einzelnen Reflexionen schwächer. Man muß daher die Anzahl der vorhandenen

Kugeln in entsprechendem Maafse als gröfser annehmen, um doch wieder im Ganzen eine eben so starke Licht-reflexion zu erhalten.

In diesem Sinne habe ich den Gegenstand behandelt. Ich habe Kugeln von verschiedenem Reflexions- und Brechungsvermögen in Bezug auf ihre Wirkung auf das die Atmosphäre durchdringende Licht unter sich verglichen, habe dabei aber als selbstverständlich vorausgesetzt, dafs bei Kugeln von geringerem Reflexionsvermögen dieser Mangel durch eine gröfsere Anzahl der vorhandenen Kugeln compensirt wird, so dafs die Gesamttreflexion aller vorhandenen Kugeln ungeändert bleibt. Unter dieser Voraussetzung habe ich berechnet, dafs selbst solche Kugeln, deren Brechungsexponent von 1 auferordentlich wenig abweicht, doch eine Lichtzerstreuung geben würden, welche in der Wirklichkeit in der Atmosphäre nicht vorkommt.

Herr Budde dagegen läfst jene zwischen Reflexionsvermögen und Anzahl vorausgesetzte Beziehung aufer Acht. Er spricht von den in den Dampfbläschen eingeschlossenen verdichteten Luftmassen, also von kugelförmigen Körpern, die gegen die äufsere Luft nur ein kleines Reflexions- und Brechungsvermögen besitzen, und dabei doch in eben so geringer Anzahl vorkommen, wie die Dampfbläschen. Diese Luftmassen können auf das die Atmosphäre durchdringende Licht nur eine sehr unbedeutende Wirkung ausüben, welche mit derjenigen, die ich berechnet habe, gar nicht zu vergleichen ist.

VIII. *Ueber Thalbildung durch Gletscher.* *Von Alexander Müller.*

Herr Dr. Pfaff neigt sich, im Anschlufs an seine dankenswerthen Mittheilungen über Gletscherbewegung (diese Annal., Februarheft), entschieden zu der Ansicht Rüti-

meyer's, daß Thäler nicht eine Folge der Gletscherthätigkeit, sondern vielmehr eine Ursache derselben seien, während die Herren Ramsay und Tyndall die entgegengesetzte Ansicht vertreten. Ganz lasse sich allerdings die Erosionskraft der Gletscher nicht leugnen, da die Felssohle unter Gletschern bei deren zeitweiligem Rückgang abgeschliffen¹⁾ erscheine, aber sicherlich sey diese Thätigkeit eine sehr unbedeutende.

Seine Hauptargumente sind die Sätze:

daß es ohne Thäler keine Gletscher gebe;

daß die hoch über dem jetzigen Gletscherniveau befindlichen Felsenschliffe nur erst wenig verwittert seyen, und daß bei Thalbildung durch Abschleifung die mit der Vertiefung allgemein stattfindende Verengung unerklärlich sey.

Die dem zweiten Satz zu Grunde liegende Beobachtung wird nicht bestritten werden können, wohl aber die von Herrn Pfaff gegebene Deutung, nämlich daß die Vertiefung des Thales *sehr schnell*²⁾ erfolgt seyn müsse, weil die Schliffe sonst der Verwitterung anheimgefallen wären, welche eisfreie Felsen stärker angreife als eisbedeckte.

Herr Pfaff setzt hierbei offenbar voraus, daß das Sinken des Gletscherniveaus ein Maafsstab für die Vertiefung der Thalsohle sey.

1) Anm. Ein gleiches Zeugniß legen die theilweise abgeschliffenen Geschiebe in den Endmoränen ab, wie ganz besonders der die Gletscherbäche trübende und charakterisirende, durch Zermahlung (nicht Verwitterung) von Gestein gebildete, aus scharfkantigen Fragmenten bestehende Schlamm. Messungen der Schlammengen, auch nur annähernde, sind wohl noch nicht veranstaltet worden. Die Centnerzahl mag eine recht bedeutende seyn; relativ zum Gletscherthal wird sie nicht sehr in's Gewicht fallen!

2) Anm. Bezüglich der geologischen Zeitrechnung wird angegeben, daß Gletscherthätigkeit nicht weiter zurück als zur Tertiärformation verfolgt werden könne. Wenn nun Herr Pfaff darauf hin meint, daß Thaleinschnitte in älteren Formationen nicht durch Gletscher entstanden seyn können, so muß ich bekennen, daß mir der Zusammenhang nicht klar geworden ist.

Nach meiner Ansicht ist dies nicht statthaft; ich halte das Sinken des Gletscherniveaus weniger für eine Folge der Thalerosion, sondern überwiegend für eine Folge klimatischer Veränderungen, für eine Abnahme der Gletschermasse.

Die Existenz einer Eisperiode vor, geologisch gerechnet, kurzer Zeit ist nicht mehr zu bezweifeln. Darnach war der ganze europäische Norden wenigstens so vergletschert, wie gegenwärtig Grönland. Auch in den Gränzländern der Alpen, welche speciell Herr Pfaff im Auge hat, sind weithin die Spuren einer ausgedehnten Vergletscherung unverkennbar und sicherlich sind die Centralalpen von zusammenhängendem, theilweise vielleicht tausende von Fußsen mächtigem Gletschereis bedeckt gewesen.

Im Vergleich mit der Verwitterungsgeschwindigkeit muß dieses Gletschereis seit der Eisperiode *sehr schnell* abgeschmolzen seyn; es würden sonst nicht auf Tausenden von Quadratmeilen im nördlichen Europa (Scandinavien und Finnland) wie in Amerika (Canada und angränzenden Ländern) die Gletscherschliffe noch deutlich aufzufinden seyn, ebenso wie nicht nur die Gesteinstrümmer der ehemaligen Moränen ihre scharfen Kanten, sondern sogar die aus Gletscherschlamm entstandenen nordischen Thone den Alkalireichthum des eingebetteten Feldspathmaterials behalten haben.

Wenn meine Deutung des Vorkommens unverwitterter Gletscherschliffe hoch über dem jetzigen Eisniveau die richtigere ist, so verliert auch Herrn Pfaff's erster Satz an Geltung. Bei dem jetzigen Klima bilden sich die Gletscher der Alpen nur in Thälern aus und setzen deren Präexistenz voraus. In der Eiszeit war das anders, wie auch jetzt in der arktischen Zone. Grönland ist zum größten Theil vergletschert und, wenn man von der jetzigen Oberflächengestaltung Schwedens und Finnlands einen Schluß ziehen darf, wahrscheinlich ganz unabhängig von der Oberfläche der Gesteinsunterlage.

Denken wir uns innerhalb des periodisch offenen arktischen Meeres ein Tausende von Quadratmeilen großer Felsenplateau, so wird sich dieses allmählich mit eines Tausende von Fuß mächtigen Eisschicht bedecken, in größter Dicke an dem kältesten, der Wassercondensation günstigsten Punkte, also mehr oder weniger in der Mitte. Da das Eis unter hohem Druck plastisch ist, gleichgültig ob chemisch, oder chemisch-moleculär, so wird das centrale Eisgebirge das peripherische Eis nach außen fort-drücken und ein Gleichgewichtszustand mit Eiszuwachs und -Abfluß sich herstellen.

An der Küste wird der Widerstand des Eises gegen den centralen Druck allmählich immer geringer, da es von dem Wasser des Meeres balancirt und von der Frictionsfläche des Felsengrundes abgehoben wird. Schließlich bricht es in großen Schollen ab und schwimmt als Treibeis und einzelne Eisberge von dannen.

Der zur Fortbewegung des Landeises nöthige ungeheure Druck wirkt selbstverständlich auch auf die nirgends ganz homogene Felsunterlage. In erster Linie muß an der Küste seine zerstörende Wirkung hervortreten, da hier der Druck einseitiger und zugleich intermittirend wird, letzteres zufolge der abwechselnden Hebung und Senkung des Meeresspiegels, der Fluth und Ebbe.

Die einmal losgedrückten Gesteintrümmer unterstützen die zerstörende Macht des Eises, indem sie unter dem schiebenden und hämmernden Eise als Schleifmittel und Meißel dienen. Die anfänglich seichten Schrammen und Riefen erweitern sich allmählich zu Thälern — allerdings mit abnehmender Geschwindigkeit!

Zweifelsohne entstehen Thäler auf vielerlei Art. Sind solche auf unserem Eiland vor der Vergletscherung vorhanden gewesen, so können sie dem Gletschereise als Strombett dienen und weiter ausgefurcht werden. Sie können aber auch unter Umständen, besonders wenn sie die Hauptrichtung des Eisstroms kreuzen, ausgetilgt werden,

indem die sie scheidenden Bergwände zerdrückt und abgeschliffen werden.

Inwieweit bei der Thalbildung in den Alpen ein umgränzendes Meer mitgewirkt habe, können wir außer Betracht lassen; wir beschränken uns auf die gegenwärtige Thätigkeit der Gletscher und auf die Frage, ob sie die von ihnen eingenommenen Thäler noch wesentlich zu vertiefen vermögen, oder ob sie dieselben nicht vielmehr conserviren?

Dafs eine ruhende Eisdecke das Gestein conservirt, muß ohne Weiteres zugegeben werden. Die Verwitterungsfactoren sind: Temperaturwechsel, mit folgendem Wechsel von Ausdehnung und Zusammenziehung besonders durch zeitweilige Eisbildung; Oxydation mit Volumveränderung und Lockerung des Gefüges; Auslaugung durch Wasser und Kohlensäure; Einwirkung der Vegetation. Alle diese Factoren werden unter einer Eisdecke, wenn nicht ganz beseitigt, so doch sehr geschwächt. Dagegen darf die mechanische Wirkung des strömenden Gletschereises nicht unterschätzt werden.

In einigen Beziehungen greift ein alpinen Thalgletscher die Unterlage noch härter an, als ein arktischer Plateaugletscher. Sein zum Theil sehr starkes Gefälle ersetzt die geringere Mächtigkeit und veranlaßt auf der Thalsohle Kataraktbildungen, welche die Ablösung von Gesteintrümmern begünstigen. Temperaturwechsel beeinflusst das Volumen und damit die Spannung der eingeklemmten Eismasse; das Gleiche gilt vom ersten Schmelzwasser, welches nach intensiver Kälte in die Spalten eindringt und dort gefriert. Bei stellenweise auf der Sohle anwachsendem Druck sinkt der Erstarrungspunkt des Wassers und ein Theil des gedrückten Eises schmilzt, während an einer benachbarten Stelle unter geringerem Drucke wieder Wasser gefriert.

Bei eintretendem Thauwetter dringt wärmeres Tagewasser vom Festland zwischen Thalwand und Eisstrom ein, und verursacht ein immer tieferes Abschmelzen und

Ablösen. Zugleich fallen Steinbrocken und Sand mit hinab, welche im Fortrücken des Eises an die Thalwand angepresst werden und diese abscheuern. Wo wegen Unebenheiten der Sohle, wie sie durch die abwechselnd härtere und weichere Beschaffenheit des Gesteins bedingt sind, Zwischenräume zwischen Eis und Gestein sich bilden, führt das Wasser, abgesehen von den durch Eisspalten von oben eindringenden Steinen, feineren und gröberen Grus hinein und wäscht das Schleifpulver wieder als Gletscherschlamm heraus. Je mehr sich das Gletschereis von der Thalwand ablöst, um so leichter kann warmes Tagewasser zwischen den Geschieben bis in die Mitte der Thalsole vordringen und dort ein Abschmelzen von unten her bewirken, was natürlich das Fortschreiten des Eises auch hier wesentlich fördert. Vielleicht ist das Tagewasser der Hauptmotor der alpinen Gletscher!

Ueber das Strömen des Gletschereises auf der Thalsole liegen noch keine directen Beobachtungen vor, und es ist sehr wünschenswerth, daß dergleichen ausgeführt werden. Möglich muß es wohl sein, an günstig gelegenen Punkten Bohrlöcher durch die ganze Dicke des Eises zu treiben, und interessant würde es sein, neben den Temperaturverhältnissen zu beobachten, ob und wie schnell durch den inneren Druck das Lumen eines solchen Bohrlochs verengt wird?

Aber auch ohne solche Beobachtungen kann es meines Erachtens nicht bezweifelt werden, daß der Eisstrom auf der Sohle fortgleitet; wengleich langsamer als auf der geringeren Reibung begegnenden Oberfläche und stellenweise vielleicht mit Anstauung und Katarakterscheinungen, so muß dieses Fortgleiten gerade die Sohle am stärksten abschleifen, weil diese am stetigsten und stärksten gedrückt wird.

Daraus folgt denn auch, daß das Gletscherthal im Allgemeinen mit der Zeit und besonders bei allmählicher Abnahme der Eismasse immer enger wird, im Widerspruch mit dem 3. Satz des Herrn Pfaff.

Die große Ungleichartigkeit der Gesteine verursacht natürlich große Unregelmäßigkeiten in der Thalbildung durch Gletscher und beeinflusst wesentlich das Verhältniß, in welchem die zerstörende Thätigkeit der Verwitterung gegenüber derjenigen des Gletschereises sich äußert.

**IX. Die Rollsteinrücken;
von Alexander Müller.**

Rollsteine bis herab zu abgerundeten Sandkörnern sind zunächst als Produkte des Rollens im bewegten Wasser anzusprechen. Man findet sie in Bächen und Flüssen wie am Meeresstrand. Je weicher das Material, je kräftiger die Bewegung des Wassers, um so schneller tritt die Abstumpfung der Ecken und Kanten ein. In den Bächen der Alpen können die Rollsteine hoch hinauf an die Quellengebiete verfolgt werden, und über ihr Entstehen giebt das unaufhörliche Poltern der vom strömenden Wasser fortbewegten Steine, besonders bei zeitweiligen Anschwellungen, unzweideutigen Aufschluß. Von strömendem Wasser werden die Rollsteine allmählig an den Ufern ausgeworfen und bilden mehr oder weniger regelmässige und dem Flußlauf parallele Rücken und Wälle.

Am Meeresstrand sind die Rollsteine selten; das Material desselben ist meist Sand — oder Fels. Wo Rollsteine massenhaft sich finden, werden sie von der Brandung in regelmässige, der Wogengröße entsprechende, mehretägige Bänke geordnet. Eine der interessantesten Rollsteinbänke ist diejenige, welche bei Weymouth (an der Südküste Englands) das Festland mit der Insel Portland verbindet.

Die großartigste Entwicklung nach Zahl und Ausdehnung dürften in Europa die schwedischen Rollsteinrücken (Rullsten-åsar) zeigen, und zugleich ist ihre Entstehungs-

geschichte noch in tiefes Dunkel gehüllt. Ihre Lagerung verdanken sie weder dem fließenden Wasser, noch der gewöhnlichen Meeresbrandung, und doch müssen sie den Strandbildungen zugezählt werden.

Wahrscheinlich sind sie unter Bedingungen entstanden, wie sie nur aus der gemeinschaftlichen Wirkung von Brandung und arktischer Vereisung hervorgehen.

Denken wir uns eine flache aber weit ausgedehnte Felseninsel, welche zu Tausenden von Fuß Mächtigkeit vergletschert ist, und von welcher die langsam gleitende Eisdecke zu Hunderten von Quadratmeilen in das Meer hinausgeschoben wird, ehe sie in einzelne schwimmende Eisberge zertrümmert wird.

Diese hinausgeschobene Eisfläche ist bis zu einem gewissen Grade biegsam (wie man im Kleinen auf gefrorener Wasserfläche Wellenbewegung wahrnehmen kann) und ruht jenseits des Gürtels, wo das Gewicht des Eises vom Wasser balancirt wird, nicht mehr auf Fels, sondern wird vom Wasser getragen.

Nun ist der Wasserspiegel kein constanter; er wechselt im offenen Meere durch Sturm, durch Ebbe und Fluth, durch den Luftdruck. Was ist die Folge? Die Eisdecke hebt und senkt sich dem entsprechend und unter ihr strömt auf dem Felsengrunde das Meer bald ein, bald aus, wie die Luft in eine athmende Brust. Wir haben hier eine submarine Brandung, die in der Thätigkeit zu rollen der gewöhnlichen Oberflächenbrandung gewiß nicht nachsteht.

Für das zurollende Material sorgt der Inlandsgletscher theils durch die von dem Eis selbst getragenen und geschobenen, theils durch die von den Gletscherbächen fortbewegten Steintrümmer, das gerollte Material aber lagert sich am Meeresgrund parallel der jeweiligen Eisküste.

Bei der allmählichen Hebung des Landes über den Wasserspiegel sind die ursprünglich submarinen Rollsteinrücken in und durch das Bereich der Oberflächenbrandung hindurchgeführt worden; dieselbe hat sicherlich theilweise umgestaltend gewirkt, doch im Ganzen mit wenig Energie.

Vermuthlich war damals schon die Ostsee ein vom Weltmeer abgetrenntes Wasserbecken und den hier sich entwickelnden Strömungen stellten sich Tausende von Felskegeln (Schären) als Wogenbrecher entgegen, wenigstens auf der grössten Fläche des jetzigen Festlandes.

Erfolgreicher dürfte an vielen Punkten das aus dem Polarmeer kommende Treibeis eingewirkt haben zur Zeit, als Rollsteinrücken noch unter dem Meeresspiegel sich befanden. Wie es heut noch an den Küsten des Eismeer, z. B. von der Baringstrasse, bisweilen so heftig an das Land gedrängt wird, daß es den losen Meeresgrund, wie der Schneepflug den Schnee, in hohe Wälle zusammenschiebt, so wird es auch weiter hinaus im tieferen Wasser die etwa vorhandenen und erreichbaren Rollsteinbänke verschoben und umgelagert haben.

X. *Ueber die Darstellung von Magneten auf elektrolytischem Wege; von W. Beetz.*

(Aus den Berichten der Bayerschen Akademie der Wissenschaften; vom Hrn. Verf. mitgetheilt.)

Herr Staatsrath von Jacobi¹⁾ beginnt einen Bericht an die mathematisch-physikalische Classe der K. Akademie zu St. Petersburg mit folgenden Worten: „Die Frage, wie sich die Molecule des galvanisch reducirten Eisens gruppieren werden, wenn die Reduction unter Einwirkung eines kräftigen Magnetismus geschieht, kann nur auf experimentellem Wege beantwortet werden. Der Versuch wurde von mir angestellt unter der Voraussetzung, es sey recht wohl möglich, durch zweckmäßige Anordnung das ohnehin im Bruche stahlartige, galvanische Eisen zu determiniren, sich unmittelbar zu per-

1) Bekanntlich seitdem (10. März d. J.) der Wissenschaft durch den Tod entzissen. P.

manenten Magneten zu constituiren¹⁾." Als Herr von Jacobi diese Worte niederschrieb, war ihm gewiß der 111. Band von Poggendorff's Annalen nicht gerade zur Hand, er würde sonst gefunden haben, daß ich, schon zwölf Jahre früher als er, mir ganz dieselbe Frage gestellt und deren Beantwortung versucht hatte²⁾. Ich würde mir nicht die Mühe geben, diese Thatsache in Erinnerung zu bringen, wenn ich weiter nichts beabsichtigte, als mein Erstenrecht zu wahren; denn es werden wohl nicht alle Physiker so, wie Herr von Jacobi, meine Arbeit ganz übersehen haben. Aber es handelt sich hier um etwas ganz Anderes, nämlich darum, daß ich auf elektrolytischem Wege Magnete erhalten habe, Herr von Jacobi aber nicht. Und da auch von anderen Seiten im Laufe der Jahre zum Theil einander widersprechende Angaben über die magnetischen Eigenschaften des elektrolytisch dargestellten Eisens ausgesprochen worden sind, so erlaube ich mir, auf den fraglichen Gegenstand noch einmal zurückzukommen.

Herr von Jacobi stellte gleichzeitig durch denselben Strom zwei hohle Eisencylinder dar, deren einer sich innerhalb einer starken Magnetisirungsspirale bildete, während der andere keinem solchen magnetisirenden Einflusse ausgesetzt wurde. Daß das erhaltene Eisen überhaupt Coërcitivkraft besaß, geht daraus hervor, daß beide Cylinder in Folge ihrer verticalen Stellung einen permanenten, wenn auch schwachen Magnetismus der Lage annahmen. Ich habe dieselbe Thatsache an den von mir früher elektrolytisch erzeugten Magneten ebenfalls bemerkt und auch erwähnt³⁾. Daß trotzdem das in der Magnetisirungsspirale befindliche Eisen keinen stärkeren Magnetismus zeigte, als das andere, erklärt sich sehr einfach dadurch, daß dessen Magnetisirung unter Umständen versucht wurde, unter denen sie garnicht eintreten kann. Auch ich hatte Eisen im Innern einer

1) Pogg. Ann. CXLIX. (1873) p. 341; aus dem XVIII. Bd. der Bulletins de l'acad. de St. Pétersbourg, Mai 1872.

2) Pogg. Ann. CXL. (1860) p. 107.

3) a. a. O. p. 111.

Magnetisirungsspirale niedergeschlagen und nachher magnetisch gefunden¹⁾, aber meine Kathode war eine ebene Platte, der als Anode ein ebene Eisenplatte gegenüberstand. Herr von Jacobi bediente sich als Kathode einer überkupferten Wachskerze, und stellte derselben eine cylindrisch aufgerollte, jene ganz umschliessende Eisenanode gegenüber. Hierdurch wurden die sich niederschlagenden Eisenmolecule von vorn herein in den magnetischen Schatten gestellt; sie wurden äusseren magnetisirenden Einflüssen in derselben Weise entzogen, wie, nach Poisson²⁾, eine kleine Magnetnadel, welche sich im Innern einer Hohlkugel von weichem Eisen befindet, keine magnetisirende Wirkung erleidet durch Magnete, welche sich ausserhalb dieser Kugel befinden. Um zu erkennen, wie weit ein solcher magnetischer Schatten in dem Falle, in welchem Herr von Jacobi experimentirte, eine Richtung der im Innern der Spirale befindlichen Molecule verhindern könne, stellte ich folgende Versuche an:

Ein frisch gehärteter, von Magnetismus freier Stahlstab, A, 238^{mm} lang, mit quadratischem Querschnitt von 6,6^{mm} Seite, 83^{grm} schwer, wurde durch Korke in der Axe einer Magnetisirungsspirale befestigt, welche bei gleicher Länge, wie der Stab, aus 330 Windungen in 2 Lagen bestand. Zuerst wurde der Stahlstab von einem in das Innere der Spirale geschobenen hohlen Eisencylinder von 2^{mm} Wanddicke umgeben und der Strom von drei Groveschen Elementen durch die Spirale geleitet. Nach mehrmaligen Unterbrechungen und Schliessungen des Stromes wurde der Stab aus der Spirale genommen, an einem Seidenfaden horizontal aufgehängt und seine Schwingungsdauer untersucht. Hierauf wurde der hohle Eisencylinder durch einen ähnlichen Messingcylinder ersetzt, der Stab in die Spirale zurückgesetzt, und wieder auf seine Schwingungsdauer untersucht. Ganz dieselbe Versuchsreihe wurde dann mit einem zweiten Stahlstabe B, von ganz gleichen Dimensionen wiederholt. Die

1) Fortschr. d. Physik XVI. (1860) p. 522.

2) Pogg. Ann. I. (1824) p. 318; aus den Ann. de chim. et de phys. XXV. 113.

beobachteten Schwingungsdauern waren nach der Magnetisirung

	A	B
in der Eisenhülse	96	84 Sec.
in der Messinghülse	12	11,1

und nachdem die Stäbe am Pole eines kräftigen Electromagnets gestrichen worden waren 9 9,5.

Die sich aus den mitgetheilten Daten ergebenden specifischen Magnetismen der beiden Stäbe, d. h. deren magnetische Momente dividirt durch ihr Gewicht, waren demnach (die Horizontalcomponente des Erdmagnetismus $T = 2,00$ gesetzt) nach der Magnetisirung

	A	B
in der Eisenhülse	2,5	3,3
in der Messinghülse	161,9	199,2
nach dem Strich	288,2	258,3.

Wenn nach diesen Versuchen sich das einfache Umgeben des Stabes mit einer Eisenhülse die magnetisirende Wirkung der Spirale auf denselben auf einen sehr geringen Werth hinabdrückt, so wurde dieser Werth noch weiter dadurch verringert, daß das Glas, welches die Kupferkathode und die röhrenförmige Eisenanode enthielt, auch von außen noch von einer aus Eisenblech zusammengebogenen Röhre umgeben war, über welche dann die Spirale gewickelt wurde. Was der Zweck dieser Eisenröhre gewesen sein kann, weiß ich nicht, da es sich hier nicht um Inductions-, sondern um Magnetisierungsversuche handelt.

Weshalb Herr von Jacobi keinen elektrolytisch erzeugten Magnet zu Stande brachte, ist demnach hinreichend verständlich. Es fragt sich aber noch, ob das von ihm dargestellte Eisen wirklich garnicht fähig war, permanenten Magnetismus anzunehmen.

Der Gedanke liegt nahe, daß das elektrolytisch niedergeschlagene Eisen je nach der Lösung, aus welcher es erhalten ist, ein verschiedenes Verhalten gegen den Magnetismus zeigen kann. Nach übereinstimmender Angabe aller Beobachter ist das galvanische Eisen, ohne Rücksicht auf diese Lösungen, stets hart und spröde; nur eine abweichende

Angabe finde ich, nämlich die von Krämer¹⁾, welcher das aus Eisenchlorürlösung niedergeschlagene Eisen so weich fand, daß es sich an den Rändern mit dem Messer schneiden liefs, während das nach Böttger's Vorschrift²⁾ aus einem Gemisch von schwefelsaurem Eisenoxydul und Salmiak gewonnene spröde und des bleibenden Magnetismus fähig war. Krämer sieht aber diesen Niederschlag nicht als reines Eisen, sondern als Stickstoffeisen an, eine Ansicht, welcher Meidinger³⁾ entgegengetreten ist, der den Stickstoff in der Gestalt von Ammoniak dem Eisen beige-mengt glaubt. Auch die Angabe Krämer's, daß das stickstofffreie Eisen weich sey, hat directen Widerspruch gefunden, indem Stammer⁴⁾ auch aus Eisenvitriollösung, ohne allen Zusatz, glasharte Niederschläge erhielt und der Meinung ist, daß die Molecularbeschaffenheit des Eisens nur von der Stromstärke, der Nähe der Elektroden und der Entwicklung von Gasblasen abhängig sey. Schon früher hat Matthiessen⁵⁾ darauf aufmerksam gemacht, daß das aus Eisenvitriol- und aus Eisenchlorürlösung erhaltene Eisen eine bedeutende Coërcitivkraft besitze, und Hobler⁶⁾ hat sogar aus concentrirter Eisenvitriollösung in ganz ähnlicher Weise, wie ich früher aus der Böttger'schen, unter dem Einflusse eines starken Magnets magnetische Eisenniederschläge dargestellt. Dagegen sagt Klein⁷⁾ selbst von dem aus einer Mischung aus Eisenvitriol- und schwefelsaurer Ammoniaklösung dargestellten Eisen, es scheine keinen permanenten Magnetismus zu haben, sondern, wie das weiche Eisen, den Magnetismus der Lage anzunehmen, und Herr von Jacobi⁸⁾, dem alle oben erwähnten Angaben entgangen oder der Beachtung

1) Dingler polyt. J. CXI. (1861) p. 444.

2) Pogg. Ann. LXVII. (1846) p. 117.

3) Dingler polyt. J. CLXIII. (1862) p. 295.

4) Dingler polyt. J. CLXI. (1861) p. 303.

5) Phil. Mag. (4) XV. (1858) p. 80.

6) Proc. of the lit. and phil. soc. of Manchester II. (1862) p. 1.

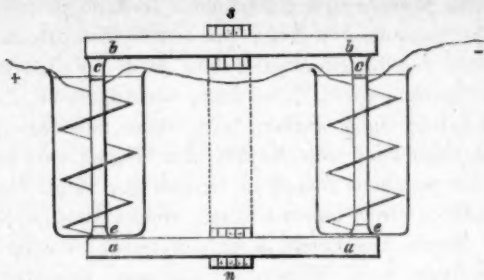
7) Bull. de l'Acad. Imp. de St. Pétersbourg XIII. (1868) p. 48.

8) Pogg. Ann. CXLIX. (1872) p. 349.

nicht werth gewesen zu sein scheinen, denkt sogar daran, ob nicht dem galvanischen Eisen eine vortheilhafte Benützung im Gebiete des Elektromagnetismus in den Fällen bevorstehe, wo es sich, wie z. B. bei Inductionsapparaten u. s. w., darum handelt, einen starken, temporären und ohne Residuum augenblicklich verschwindenden Magnetismus herzustellen, zu welchem Zweck er freilich gar nicht das galvanische Eisen direct untersucht hat, sondern erst, nachdem dasselbe durch Ausglühen u. dgl. in seiner Structur verändert worden war. Füge ich zu diesen, einander zum Theil geradezu widersprechenden Angaben hinzu, daß nach den Versuchen von Lenz ¹⁾ das galvanische Eisen sehr beträchtliche Mengen von Gasen, namentlich von Wasserstoffgas, absorbiren kann, so ist die Behauptung gewiß gerechtfertigt, daß man es je nach der Beschaffenheit der Lösungen, der Stärke und Dichtigkeit des Stromes und nach andern Nebenumständen mit Niederschlägen ganz verschiedener Natur zu thun haben kann, und daß erst durch den Versuch festgestellt werden muß, ob das nach Herrn von Jacobi's Methode dargestellte Eisen wirklich aller Coërcitivkraft bar ist, oder ob er elektrolytische Magnete ebensogut, wie ich, erhalten haben würde, wenn er, wie er versprochen hatte, seinem Apparate eine „zweckmäßige Anordnung“ gegeben hätte.

Ich habe deshalb folgende vergleichende Versuche angestellt ²⁾.

- 1) Bull. de l'Acad. Imp. de St. Pétersburg XIV. (1869) p. 252 und 337.
- 2) Ich habe bei meinen Versuchen nie so dicke Eisenschichten anwachsen lassen, wie es Herr von Jacobi gethan hat, weil mit zunehmender Dicke des Niederschlages dessen specifischer Magnetismus abnehmen muß. Vergleiche meine frühere Abhandlung p. 112.



Ein fünflamelliger Haarlemer Magnet von 75 Kgr. Tragkraft wurde so aufgestellt, daß seine beiden Pole *n* und *s* sich lothrecht übereinander befanden. Vor jede Polfläche wurde horizontal ein Eisenanker, *aa* und *bb*, gelegt; auf die Enden *a* und *a* wurden zwei Bechergläser mit fast ebenem Boden gestellt, deren jedes eine Spirale aus etwa 4^{mm} dickem Eisendraht enthielt. In der Achse jedes Glases wurde eine überkuferte 60^{mm} lange Wachskerze lothrecht auf einen mit Firnis überzogenen Eisenklotz *e* aufgestellt und durch einen anderen Eisenklotz *c*, der an ein Ankerende *b* aufgehängt war, in dieser Lage festgehalten. Das eine Glas wurde mit der von Herrn von Jacobi benützten, von Klein vorgeschlagenen, bittersalzhaltigen Lösung, das andere mit der Böttger'schen Lösung gefüllt. Die erstere war durch kohlensaure Magnesia nahezu neutralisirt und ganz wie es Herr von Jacobi vorschreibt, bis zum specifischen Gewicht 1,270 verdünnt; die letzte war concentrirt. Nun wurde der Strom eines Leclanché-Elementes durch beide Zersetzungszellen hintereinander geleitet, so daß die Eisenspiralen als Anoden, die Kupfercylinder als Kathoden dienten. Die Spiralform war für die Anoden deshalb gewählt, weil zusammenhängende Eisencylinder unter dem inducirenden Einfluß der stark magnetischen Anker selbst einen kräftigen Magnetismus annehmen, der auf die Magnetisirung des Niederschlages nachtheilig wirken muß. Der Firnisüberzug auf den Eisenklötzen *cc* und *ee* verhinderte die Entstehung

eines Niederschlages auf den Klötzen selbst, sowie eine Nebenschließung des Stromes durch den Eisenanker *bb*. Das Gewicht der Kerzen war vor Beginn des Versuches bestimmt. Nachdem derselbe 3 Tage gedauert hatte, wurde der Apparat auseinander genommen. Beide Kerzen waren mit Eisen bedeckt. Der Niederschlag I aus der Böttger'schen Lösung war schön metallisch glänzend, ganz glatt, und nur mit kleinen Gruben, den Anzeichen einer mäßigen Wasserstoffentwicklung, bedeckt. Der Niederschlag II aus der Jacobi'schen Lösung war schwarz, ganz mit rauhen Aesten bedeckt in der Art, wie die Zeichnung, welche Herr von Jacobi seiner Mittheilung beigegeben hat, zeigt, nur waren die Aeste alle nach oben gerichtet, offenbar durch die ziemlich lebhaft aufsteigenden Gasblasen gedrängt. Dafs die Gasentwicklung in dieser Zelle lebhafter gewesen war, als in der andern, war nicht nur während des Versuchs bemerkbar, es zeigte sich auch dadurch, dafs die Gewichtszunahme der Anode

$$I = 7,47 \text{ gr.}, \quad II = 6,46 \text{ gr.}$$

betrug. Die gröfsere Concentration der Böttger'schen Lösung hatte wohl diese lebhafte Gasentwicklung gemäfsigt. Aus den beiden Magnetröhren wurde das Wachs nicht herausgeschmolzt, weil die Erwärmung dem etwa vorhandenen Magnetismus Eintrag thun konnte; vielmehr wurden die ganzen Stäbe sorgfältig getrocknet, durch Eintauchen in dünne Schellacklösung mit einem gegen Rost schützenden Ueberzug versehen, und dann nach der Methode der Ablenkung auf ihren Magnetismus untersucht. Dabei ergab sich der spezifische Magnetismus von

$$I = 214,5, \quad II = 59,0.$$

Der Magnet I zog Eisenfeile kräftig an, II nur schwach. In der vorher beschriebenen Magnetisirungsspirale der magnetisirenden Wirkung von 3 Groveschen Elementen im Sinne ihres bisherigen Magnetismus ausgesetzt, nahmen sie die specifischen Magnetismen an:

$$I = 256,0, \quad II 65,5.$$

In der That also ist das aus der Böttger'schen Lösung erhaltene Eisen des permanenten Magnetismus in viel höherem Maasse fähig, als das Jacobi'sche Eisen. Wenn aber am letzteren gar kein solcher gefunden wurde, so war das nur der unzuweckmäßigen Anordnung des Jacobi'schen Apparates zuzuschreiben. Der ästige Magnet zeigte sich auch bei weiteren Versuchen mit Coërcitivkraft wohl begabt; in der Magnetisirungsspirale konnte er sowohl durch galvanische Ströme, als durch die Funkenschläge einer Holtz'schen Maschine nach Belieben in der einen oder anderen Richtung mit permanentem Magnetismus versehen werden.

Es war weiter zu untersuchen, ob der aus der Böttger'schen Lösung erhaltene Niederschlag als materiell verschieden (als Stickstoffstahl) eine grössere Coërcitivkraft besaß, als der aus der Klein'schen Lösung gewonnene (der dann nur als Eisen oder als Wasserstoffeisen zu betrachten wäre), oder ob lediglich die verschiedene Form der beiden Niederschläge ihre ungleiche Coërcitivkraft bedingte. Ich versuchte deshalb aus beiden Lösungen möglichst gleichartige Niederschläge darzustellen. Auch die Klein'sche Lösung wurde concentrirt angewandt. Der elektrolysirende Strom wurde wieder durch ein Leclanché-Element erregt, er wurde aber durch Einschaltung eines Widerstandes von 20 Q.E. soweit geschwächt, daß die Wasserstoffentwicklung nur eine geringe war. Sie ganz zu unterdrücken gelang, auch durch grössere Widerstände, nicht. Die sich abscheidenden Blasen wurden mittelst eines Pinsels von Zeit zu Zeit entfernt, was sehr leicht geschehen konnte, da die spiralförmige Elektrode den Niederschlag dem Auge nicht verdeckt. Die beiden ersten auf diese Weise erhaltenen Niederschläge, III aus Böttger'scher, IV aus Klein'scher Lösung, wurden nicht gleichzeitig, sondern jeder für sich direct zwischen den Magnetpolen dargestellt. Das Gewicht von III war = 4,105 gr., das von IV = 1,405 gr. Bei allen folgenden Versuchen wurde dagegen jedesmal ein Magnetpaar zugleich an dem in der Figur dargestellten

Apparat erzeugt, und durch ein gleichzeitig eingeschaltetes Kupfervoltameter ermittelt, welche Eisenmenge auf den Kathoden zu erwarten war. Als solche dienten von jetzt an polirte Messingstäbe von 130^{mm} Länge. So wurde zunächst aus der Böttger'schen Lösung der Magnet V, 1,062 gr. schwer und aus der Klein'schen VI, 1,316 gr. schwer, erhalten, während nach Angabe des Voltameters 1,100 gr. Eisen hätte niedergeschlagen werden sollen. Die Magnete III und V waren vollkommen blank und silberweiß, IV und VI schwarz, matt, mit kleinen Warzen bedeckt, nach dem Trocknen unter der Luftpumpe über Schwefelsäure ging ihre Farbe in mattes Grau über. Die spezifischen Magnetismen waren bei

$$\text{III} = 1084 \quad \text{IV} = 49,9$$

$$\text{V} = 1225 \quad \text{VI} = 66,6$$

und nach dem Magnetisiren in der Spirale

$$\text{III} = 1150 \quad \text{IV} = 57,7$$

$$\text{V} = 1261 \quad \text{VI} = 73,5.$$

Da es mir also nicht gelungen war, aus der Klein'schen Lösung glatte Magnete zu erhalten, so verließ ich dieselbe und wählte statt ihrer eine Lösung von Eisenchlorür. Es wurden wieder zwei Magnetpaare nacheinander dargestellt: Im ersten Versuch sollten 0,436 gr. Eisen gewonnen werden; der Magnet VII (aus Böttger'scher Lösung) wog 0,426 gr., VIII (aus Eisenchlorür) 0,411 gr. Im zweiten Versuch waren 0,746 gr. Eisen zu erwarten; der Magnet IX (aus Böttger'scher Lösung) wog 0,716 gr., X (aus Eisenchlorür) 0,660 gr. Die spezifischen Magnetismen dieser Stäbe waren

$$\text{VII} = 1419 \quad \text{VIII} = 157,9$$

$$\text{IX} = 931,4 \quad \text{X} = 215.$$

Nach dem Magnetisiren in der Spirale hatte

$$\text{IX} = 1466 \quad \text{X} = 267.$$

Wiederum waren VII und IX silberweiß und glänzend, VIII und X hellgrau, matt und mit etwas dunkleren Leisten in der Längsrichtung bewachsen. Eine solche 35^{mm} lange Leiste wurde vom Stabe VIII losgesprengt; sie wog 0,116 gr.

und zeigte den specifischen Magnetismus 374,7. Nachdem ich diese auffallende Beobachtung gemacht hatte, untersuchte ich die Stäbe VIII und X näher, und fand, daß jede dieser kleinen Leisten ein Magnet für sich war, daß also der als Elektrode dienende Messingstab mit einer schwach magnetisirten Unterlage bedeckt war, auf welche dann eine Anzahl von kleinen, aber ziemlich kräftigen Magneten aufgewachsen war. Die ganzen Stäbe verhielten sich daher wie Magnete, welche mit Folgepunkten versehen sind. Führt man sie an dem Pole einer Magnetnadel vorüber, so wird derselbe in der That bald angezogen, bald abgestoßen. Ueber den Stab X zog sich fast der ganzen Länge nach eine solche etwa 2^{mm} breite Leiste hin, deßhalb erscheint auch sein Gesamtmagnetismus höher, als der von VIII, an welchem nur kürzere Leisten vorhanden waren¹⁾.

Hiernach darf ich nun wohl die Ergebnisse meiner Versuche in Folgendem zusammenfassen:

„Das aus salmiakhaltiger Eisenlösung niedergeschlagene Eisen ist in ganz hervorragendem Maasse des permanenten Magnetismus fähig²⁾, das aus den anderen Lösungen nur in geringerem Grade. Entsteht der Niederschlag unter der Einwirkung eines starken Magnetismus (und unter Vermeidung schädlich wirkender Nebenumstände), so bilden sich aus der salmiakhaltigen Lösung starke Magnete von gleichmäßiger Structur, während aus salmiakfreier Lösung Magnete gebildet werden, deren Structurunregelmäßigkeiten Folgepunkte hervorrufen, und dadurch den von vornherein schon schwächeren Magnetismus des Niederschlages noch schwächer erscheinen lassen. Ein nicht unbedeutender Grad von Coërcitivkraft ist aber dem galvanischen Eisen unter keinen Umständen abzusprechen, es sei denn,

- 1) Die sämmtlichen Magnetproben wurden der math.-phys. Classe in deren Sitzung vorgelegt.
- 2) Nach F. Kohlrausch (dessen Leitfaden der praktischen Physik. 2. Aufl.) beträgt der specifische Magnetismus bei den besten Magneten von sehr langgestreckter Gestalt etwa 1000.

dafs es durch Glühen oder dgl. Processe in seiner Structur verändert worden ist“.

Als Grund der erwähnten Structurunregelmäßigkeiten glaube ich die Beschaffenheit der Lösungen selbst ansehen zu müssen. Während die salmiakhaltige Lösung vollkommen klar bleibt, scheidet sich auf ihr eine feste krystallinische Kruste ab. Werden Stücke derselben losgebrochen, so fallen sie zu Boden, ohne den Stab zu verunreinigen. Die Chlortürlösung trübt sich, und lagert beständig etwas von ihrem schlammigen Niederschlage auf die Elektrode ab. Die Klein'sche Lösung bleibt zwar auch ziemlich klar, auf ihrer Oberfläche bildet sich aber ein schlammiger Schaum; fällt von diesem etwas nieder, so wird ebenfalls die Elektrode verunreinigt. Dadurch muß der Eisenniederschlag an Homogenität verlieren, und durch theilweises Entfernen der Verunreinigung (durch Abpinseln, Aufsteigen der Gasblasen u. dgl.) kann die Bildung der oben erwähnten Partialmagnete veranlaßt werden. Das auffallend hohe Gewicht des Niederschlages VI kann wohl auch nur durch Einmischung fester fremdartiger Bestandtheile erklärt werden, während das zu kleine Gewicht der übrigen aus stickstofffreier Lösung erzeugten Magnete auf eine lebhaftere Gasentwicklung schliessen läßt.

In der k. k. Staatsdruckerei in Wien wird ebenfalls ein salmiakhaltiges Eisenbad angewandt, um die Kupferplatten mit einer silberweißen Schicht zu verstählen. Klein schlägt (a. a. O.) mehrere ammoniakhaltige Bäder für den gleichen Zweck vor. Ob die in der k. Staatsdruckerei in St. Petersburg von Scamoni dargestellten, „zum Kupferdruck vollkommen geeigneten Eisenplatten“, welche Herr von Jacobi (Pogg. Ann. CXLIX. p. 345) erwähnt, aus ammoniakhaltiger Lösung gewonnen werden, ist nicht angegeben. Gewifs aber ist eine solche für die Darstellung homogener Niederschläge die geeignetste.

XI. Welche Strahlen des Lichtes zerlegen bei Sauerstoffzutritt das Chlorophyll?

von Julius Wiesner,

ord. Professor an der Universität zu Wien.

Es ist lange bekannt, daß sich alkoholische Chlorophyll-extracte im Lichte unter Verfärbung zersetzen, rasch im Sonnenlichte, langsam im diffusen Tageslichte. In einer Dunkelheit, in welcher Samen monocotylar und dicotylar Pflanzen keimen, ohne jedoch zu ergrünen, verfärben sich solche grüne Auszüge, selbst bei reichlichem Zutritt von atmosphärischer Luft nicht; aber selbst bei so geringen Helligkeiten, welche das Lesen gedruckter Schrift nur schwer ermöglichen, aber bei welchen schon nach mehreren Stunden ein Ergrünen vergeilter Keimlinge eintritt, verfärben sich Chlorophylllösungen, vorausgesetzt, daß der Alkohol des Extracts nicht zu Essigsäure oxydirt wird, selbst nach viele Tage hindurch andauerndem Stehen nicht, woraus sich ergibt, daß zur Zerstörung des Chlorophylls im Lichte größere Helligkeiten, als zur Entstehung desselben nothwendig sind.

Die Zerlegung des Chlorophylls im Lichte ist, wie Gerland ¹⁾ zuerst zeigte, ein Process, der ebenso vom Sauerstoff als vom Lichte abhängt. Denn ebenso, wie ein Chlorophyllextract im Dunkeln bei Sauerstoffzutritt intact bleibt, ebenso unverändert bleibt es, wenn die grüne Flüssigkeit, vorher durch Auskochen sauerstofffrei gemacht, über Quecksilber aufgestellt wird. Gerland ²⁾ bestreitet indeß, daß man es in der Zerstörung des aufgelösten Chlorophylls, vom Anfang bis zum Ende, mit einem Oxydationsprocess zu thun habe, welcher Auffassung ich auf Grund der von mir angestellten Beobachtungen nicht zustimmen kann. Auf diese Frage werde ich jedoch hier

1) Diese Annalen, 1871, S. 594 ff.

2) l. c. S. 595.

nicht eingehen, sondern selbe in einer größeren Abhandlung über die Beziehungen des Lichtes zum Chlorophyll, welche in den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Wien erscheinen wird, beantworten; in diesen Zeilen werde ich bloß über jene von mir angestellte Beobachtungen berichten, welche den Zusammenhang zwischen Brechbarkeit des Lichts und Zerstörung des Chlorophylls aufzuklären suchen.

Die ersten Versuche, welche über diesen Gegenstand angestellt wurden, rühren von Sachs¹⁾ her. Er zeigte, daß hinter einer besonnenen Lösung von doppeltchromsaurem Kali, welcher bloß die Strahlen von Roth bis zum Anfange von Grün durchläßt, die Verfärbung eines alkoholischen Chlorophyllextractes fast ebenso rasch vor sich geht, als wenn das Sonnenlicht, ohne durch ein absorbirendes Medium zu gehen, auf die grüne Flüssigkeit trifft; daß hingegen die Verfärbung von Chlorophylllösungen hinter eine Auflösung von schwefelsaurem Kupferoxydammoniak, welche bloß Grün bis zu Violett durchläßt, weit aus langsamer fortschreitet.

Aus diesen Versuchen ergibt sich, daß den Strahlen der schwächer brechenden Hälfte des Sonnenspectrums eine größere chlorophyllzersetzende Kraft als den Strahlen der stärker brechenden Hälfte zukommt, daß mithin die sogenannten chemischen Strahlen des Lichtes bei diesem Prozesse eine relativ nur geringe Wirkung ausüben.

Zu der genannten Abhandlung²⁾ spricht Sachs, jedoch ohne weitere Beibringung von Beweisen, den Satz aus, daß die hellleuchtenden Strahlen des Lichtes, also die gelben und beiderseits benachbarten, das Chlorophyll am raschesten zerlegen.

Dieser Ansicht steht eine andere gegenüber, welche sich aus einer Arbeit von Lommel³⁾ ableiten läßt. Der

1) Bot. Zeit. 1864, S. 362.

2) l. c. S. 363.

3) Diese Annalen 1871, S. 568 ff.

genannte Autor sucht festzustellen, daß jene Strahlen des Lichtes, welche im Chlorophyllspectrum absorbirt erscheinen, die Kohlensäurezerlegung in den grünen Pflanzentheilen vollziehen, und hält aus Gründen, auf welche ich hier nicht eingehe, dafür, daß die rothen, zwischen den Fraunhofer'schen Linien B und C gelegenen Strahlen, die Hauptrolle bei diesem Processe spielen. — Lommel hat aber, wie ich glaube, den Bau und die Function eines lebenden *Chlorophyllkorns* übersehen, welches letztere bekanntlich aus einem geformten, an sich farblosen Stück Protoplasma besteht, das, namentlich in seiner peripheren Partie, durch den Chlorophyllfarbstoff tingirt wird, und auch aufserachtgelassen, daß die Assimilation der Kohlensäure und des Wassers im Protoplasmakörper und nicht im grünen Farbstoff des Chlorophyllkorns vor sich geht. Die Absorptionsstreifen im Spectrum einer Chlorophylllösung besagen nichts über jene Antheile des Lichts, welche bei der Assimilation der Kohlensäure und des Wassers in der Pflanze theilhaftig sind, vielmehr scheinen sie uns jene Strahlen des Lichtes zu bezeichnen, welche bei Vorhandenseyn von Sauerstoff das Chlorophyll zersetzen, eine Anschauung, welche Gerland¹⁾ jedoch mit bestimmten Modificationen vertritt.

Gerland sagt, „daß das Chlorophyll durch alle Strahlen verfärbt (zersetzt) wird, welche es in Schichten von der Dicke von einigen Millimetern absorbirt.“ — Wenn ich Gerland's Auseinandersetzung richtig aufgefasst habe, so sucht er auf Grund von Untersuchungen, die sich theils mit der Verfärbung von durch Chlorophylllösungen tingirtem Papier hinter farbigen Gläsern, theils mit der Verfärbung von Chlorophylllösungen beschäftigen, darzuthun, daß die zwischen B und C gelegenen rothen, und die im Violetto gelegenen, im Chlorophyllspectrum absorbirt erscheinenden Strahlen des Lichtes bei der Chlorophyllzersetzung am stärksten theilhaftig sind.

1) l. c. S. 601 ff.

Chlorophyll
bark
rop
gleich
oxy
Kali
roph

nen
theil

chro
saure

Chlorophyll
viel

brach
bezie

setzt
bis

mir
die f

— K

wässer
bary

herrn

Diese
Wasser

früher
stimmt

nämlich
gleich

D
stanz

1) B

Nach Baranetzky¹⁾ soll die Geschwindigkeit der Chlorophyllzersetzung im Lichte gar nicht von der Brechbarkeit, sondern lediglich von der Helligkeit des die Chlorophylllösung treffenden Lichtes abhängig seyn. Hinter gleich durchsichtigen Lösungen von schwefelsaurem Kupferoxydammoniak und Eisenchlorid oder doppelt chromsaurem Kali würde, nach Baranetzky, die Verfärbung mit Chlorophyllösungen mit gleicher Geschwindigkeit erfolgen.

Ich erlaube mir die folgenden Versuchsreihen als kleinen Beitrag zur Lösung der bezeichneten Frage mitzutheilen.

Ich bereitete eine concentrirte Lösung von doppelt-chromsaurem Kali, eine ebensolche Lösung von schwefelsaurem Kupferoxydammoniak und eine gesättigte ätherische Chlorophylllösung, die sich bekanntlich bei Sauerstoffzutritt viel langsamer als eine alkoholische im Licht zersetzt, und brachte diese drei Flüssigkeiten durch Zusatz von Wasser, beziehungsweise Aether, auf gleiche Durchsichtigkeit. Ich setzte nämlich die Verdünnungsflüssigkeiten so lange zu, bis ein von der Sonne beleuchteter Gesimsstreifen eines mir gegenüber stehenden Gebäudes bei Betrachtung durch die farbigen Lösungen für mein Auge eben sichtbar wurde. — Ferner versetzte ich eine außerordentlich verdünnte wässrige Lösung von Oxalsäure mit einer Spur von Chlorbaryum, wodurch eine vom herausfallenden oxalsauren Kalk herrührende nebelige Trübung in der Flüssigkeit entstand. Diese Flüssigkeit wurde unter Schütteln so lange mit Wasser verdünnt, bis sie, bei gleicher Dicke, mit den drei früher genannten Flüssigkeiten in der Helligkeit übereinstimmte. Endlich brachte ich noch eine fünfte Flüssigkeit, nämlich eine Lösung von Aesculorcëin mit den übrigen auf gleiche Helligkeit.

Die zuletztgenannte, von Rochleder entdeckte Substanz, deren merkwürdige optische Eigenschaften Grai-

1) Botan. Zeit. 1871, S. 193 ff.

lich¹⁾ auffand und näher untersuchte, verdanke ich der Güte des erstgenannten Herrn.

Die fünf eben bezeichneten Flüssigkeiten wurden auch nach dem Lambert'schen Verfahren auf ihre Helligkeit geprüft, und da selbe sich als gleich hell erwiesen hatten, zum Versuche benutzt; vorher wurden sie jedoch erst spectroscopisch geprüft. Es ergab sich bei einer Dicke der Flüssigkeit von 20 Millim. Folgendes:

Das durch oxalsauren Kalk getrübtte Wasser, in den folgenden Zeilen mit W (weiss) bezeichnet, liess alle Strahlen durch.

Die Lösung von doppelchromsaurem Kali, die ich mit G (gelb) bezeichnen werde, liess die Strahlen von B—E durch.

Die ätherische Lösung des Chlorophylls, Gr (grün), liess alles Licht bis auf die sieben Absorptionsstreifen durch²⁾, B—C wurde absorbiert.

Die Lösung von Aesculorcäin, R (roth), liess, wie Grailich zuerst zeigte,³⁾ blofs Roth von B—C durchgehen.

Die Lösung von schwefelsaurem Kupferoxydammoniak, Bl (blau), liess E—H und daneben eine Spur von Roth durch.

Diese Flüssigkeiten wurden in cylindrische Glasgefäße gebracht, in welche je ein zu $\frac{1}{2}$ mit frischer, smaragdgrüner Chlorophylllösung gefüllter kleiner Glascylinder tief in die Flüssigkeit versenkt wurde. Ich trug dafür Sorge, daß die kleineren Cylinder alle genau senkrecht in den Versuchs-Flüssigkeiten standen; die Dicke der Flüssigkeitsschicht vor jeder Chlorophylllösung in jedem Apparat die gleiche war, nämlich 20 Millim. betrug, und daß der Zutritt des Lichtes von oben her zu den Chlorophylllösungen abgehalten wurde.

1) Krystallographisch-optische Untersuchungen, Wien 1858.

2) Kraus, Chlorophyllfarbstoffe, Stuttgart 1872.

3) l. c. S. 188; auch selbst noch bei einer Dicke von 3 Millim. wird blofs rothes Licht von der bezeichneten Brechbarkeit durchgelassen.

Noch habe ich zu bemerken, daß die ätherische Chlorophylllösung (Gr), um sie während des Versuches möglichst intact zu halten, früher ausgekocht wurde, und daß diese Flüssigkeit der Einwirkung größerer Sauerstoffmengen durch einen dichten Korkverschluss entzogen war. Es ist selbstverständlich, daß dieser Verschluss die Einsenkung eines Gefäßes zur Aufnahme der alkoholischen Chlorophylllösung nicht hindert.

Die fünf Apparate wurden der Einwirkung des Sonnenlichtes ausgesetzt bei einer Lufttemperatur von 20 bis 22° C. Die kleineren Cylinder wurden von Zeit zu Zeit aus den farbigen Lösungen herausgenommen und die in ersteren enthaltenen Chlorophyllösungen mit einer im Dunkeln aufbewahrten Probe des grünen Extractes, beziehungsweise mit der im Apparate W verfärbten Chlorophylllösung verglichen.

a) Beginn der Entfärbung der Chlorophyllextracte:

In	W	nach	10 Minuten
"	G	"	15 "
"	Gr	"	17 "
"	R	"	24 "
"	Bl	"	55 "

b) Die Chlorophyllextracte wurden olivengrün:

In	W	nach	30 Minuten
"	G	"	34 "
"	Gr	"	37 "
"	R	"	95 "
"	Bl	"	150 "

c) Die Chlorophyllextracte wurden hellbräunlich:¹⁾

In	W	nach	1,18 Stunden
"	G	"	1,18 "
"	Gr	"	1,30 "
"	R	"	2,50 "
"	Bl	"	4,08 "

1) Die Absorptionsspectra waren völlig identisch.

Aus einer großen Zahl von Versuchen, die stets übereinstimmende Resultate ergaben, hebe ich noch die folgenden hervor.

Im diffusen Tageslichte wurden die weingeistigen Chlorophyllextracte nach folgenden, in Stunden ausgedrückten Zeiten hellbräunlich und stimmten auch im Absorptionsspectrum miteinander überein.

W	nach	30
G	"	35
Gr	"	82
Bl	"	211 ¹⁾

Aus diesen Beobachtungen geht zunächst hervor, daß die Behauptung Baranetzky's, die Geschwindigkeit der Chlorophyllzersetzung sey bei gleicher Helligkeit von der Brechbarkeit der wirksamen Strahlen unabhängig, unrichtig ist.

Diese Beobachtungen lehren ferner, daß die Strahlen im Roth, welche zwischen den Fraunhofer'schen Linien *B* und *C* liegen, nicht, wie man nach Lommel's Auseinandersetzungen vermuthen sollte, die relativ größte Chlorophyll zerstörende Kraft besitzen; denn wäre dem so, so müßte sie hinter einer normalen Chlorophylllösung, in welcher die Strahlen *B-C* ausgelöscht sind, viel langsamer vor sich gehen, als hinter einer Lösung von Aesculorcein, welche bloß die Strahlen von *B-C* durchläßt, denn gerade der umgekehrte Fall fand statt.

Auch Gerland's Angabe, daß die rothen und violetten Strahlen bei der Chlorophyllzersetzung am stärksten betheiligt sind, kann nach obigen Mittheilungen nicht als richtig angesehen werden.

Vielmehr lehren vorstehende Beobachtungen, daß der von Sachs aufgestellte, von ihm aber nicht näher begründete Satz: daß die am meisten leuchtenden Strahlen des Lichtes, also die gelben und beiderseits benachbarten, am raschesten die Zersetzung von Chlorophylllösungen hervorrufen, richtig ist.

1) Dieser Versuch dauerte 20 Tage.

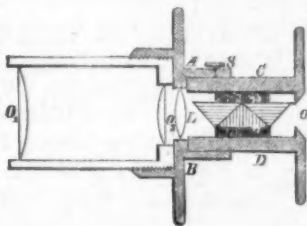
Diese und andere Beobachtungen¹⁾ lassen annehmen, daß alle vom Lichte abhängigen, chemischen Vorgänge im Chlorophyllkorn, nämlich Entstehung und Zerstörung von Chlorophyll und Assimilation der Kohlensäure und des Wassers, am raschesten durch die am meisten leuchtenden Strahlen vollzogen werden und alle sichtbaren Antheile des Spectrums die Fähigkeit haben, diese Functionen auszuüben; während die durch das Licht hervorgerufenen mechanischen Wirkungen auf die Pflanze vorwiegend den sogenannten chemischen Strahlen des Lichtes zuzuschreiben seyn dürften.

Wien, im März 1874.

XII. Ueber ein einfaches Ocularspectroskop für Sterne; von F. Zöllner.

(Aus den Berichten der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaft April 1874 vom Hrn. Verf. mitgetheilt.)

Die beistehende Figur zeigt in natürlicher Gröfse den Durchschnitt einer compendiösen Form eines Stern-Spectroskopes in Verbindung mit dem Oculare eines beliebigen Fernrohres.



Das Spectroskop besteht aus einem kleinen Prisma mit gerader Durchsicht, welches in einer Hülse *CD* be-

¹⁾ Sachs, Lehrbuch der Botanik 3. Aufl. p. 652.

festigt ist und dessen Zerstreuung ungefähr aequivalent dem Prismensysteme eines Browning'schen Miniaturspectroskopes ist. Die Hülse CD ist in einer zweiten Hülse AB beweglich, welche auf den Ocularkopf geschraubt werden kann und eine Cylinderlinse L von ungefähr 100 Millimeter Brennweite enthält. Da die Länge der durch diese Linse erzeugten Lichtlinie außer von ihrer Brennweite auch von den Dimensionen und Verhältnissen der optischen Theile des Fernrohrs abhängt, so ist es zweckmäßig, mehrere Cylinderlinsen von verschiedener Brennweite vorrätig zu haben, um sie je nach der gewünschten Länge der Lichtlinie und somit der Breite des Spectrums in Anwendung bringen zu können:

O_1 und O_2 sind die beiden Linsen des Oculars und gehören daher nicht mehr zum Spectroskop.

Soll mit diesem Instrumente, das Spectrum eines Sternes beobachtet werden, so wird zunächst die Hülse CD mit dem Prisma entfernt, und das Ocular so eingestellt, daß dem in O befindlichen Auge eine scharfe Lichtlinie erscheint. Es ist bei dieser Einstellung wesentlich, daß sich das Auge ungefähr in derselben Entfernung von der Linse L befinde, wie bei Anwendung des Prisma's. Hierauf wird die Hülse CD so eingesetzt, daß die brechende Kante des Prisma's, wie gewöhnlich, parallel der Lichtlinie liegt und somit das Spectrum seine größte Breite erhält. Selbstverständlich braucht für ein gegebenes Fernrohr die erwähnte passende Einstellung nur einmal ermittelt zu werden, so daß alsdann durch eine kleine Schraube S das Prisma in unveränderlicher Lage zur Cylinderlinse L befestigt werden kann. Das Prisma ist von Herrn Merz in München angefertigt, und wird von ihm in dieser compendiösen Form vorzugsweise für Mikroskope benutzt.

Die Lichtstärke dieses Ocularspectroskopes ist so bedeutend, daß dasselbe bereits in Verbindung mit einem kleinen Reisefernrohr von nur 35 Millimeter Objectivöffnung und ungefähr 400 Millimeter Brennweite die

Linien von Sternen erster Gröfse, wie Wega, Arctur, α Orionis und selbst α Herculis bei entsprechender Beschaffenheit der Luft deutlich zeigt, wie sich u. A. im Laufe des vergangenen Jahres bei Gelegenheit ihres Besuches in Leipzig die Herren Prof. Winnecke und Dr. Vogel überzeugt haben. Besonders schön ist das Spectrum der Venus, wenn sie als schmale Sichel erscheint.

Obschon sich nach den bekannten, von Browning, Vogel u. A. angewandten Methoden sehr leicht eine Scale mit diesem Instrumente verbinden läfst, so dürfte sich dasselbe auch ohne eine solche besonders zu systematischen Massenbeobachtungen von Fixsternspectren empfehlen, bei denen es sich vorzugsweise um Ermittlung der typischen Beschaffenheit der Spectra handelt. Da die wesentlichen Unterschiede dieser Typen wahrscheinlich nur von der Temperatur und Masse jener glühenden Himmelskörper abhängen, und nach den bisherigen Untersuchungen Secchi's u. A. jene Typen in einer gewissen Beziehung zur räumlichen Vertheilung der Sterne am Himmel stehen, so dürften derartig systematisch unternommene Massenbeobachtungen in Zukunft von hoher Bedeutung für die Fortschritte der Astrophysik werden.

Ich erlaube mir schliesslich die Bemerkung, dafs die beschriebene Combination bereits auf der letzten Versammlung der astronomischen Gesellschaft im September 1873 zu Hamburg von mir erläutert und vorgezeigt worden ist.

XIII. Ueber die Anzahl der Bilder bei zwei gegen einander geneigten Planspiegeln;

von Dr. H. Klein,

Prof. am Vitzthum'schen Gymnasium in Dresden.

In den Lehrbüchern der Physik steht über die Anzahl der Bilder, welche von einem leuchtenden Punkte in zwei gegen einander geneigten Planspiegeln entstehen, ein Gesetz, welches entweder ganz falsch ist, wie sich durch das Experiment und durch eine einfache theoretische Betrachtung beweisen lässt; oder welches wenigstens für ein Lehrbuch zu unbestimmt gehalten ist. Es soll nämlich die Zahl der Bilder, wenn α , der Neigungswinkel der beiden Spiegel, ohne Rest in 360° aufgeht, $\frac{360^\circ}{\alpha} - 1$ seyn oder mit anderen Worten der Gegenstand erscheint $\frac{360^\circ}{\alpha}$ mal¹⁾. Nach diesem Gesetze wäre demnach z. B. bei $\alpha = 72^\circ$ die Anzahl der Bilder 4. Es giebt aber wirklich, nur wenn der leuchtende Punkt auf der Halbierungslinie des Neigungswinkels beider Spiegel liegt, wie unten gefunden werden soll, 4 Bilder sonst aber stets 5.

Diese 5 Bilder von Lichtpunkten, die nicht auf der Halbierungslinie liegen, lassen sich leicht beobachten, wenn man nur das Auge in die Nähe der Spiegel bringt, wie unten theoretisch gefolgert werden soll.

Es soll nun zunächst die Abhängigkeit der Anzahl der Bilder von dem Neigungswinkel der Spiegel und dem Ort des leuchtenden Punktes gefunden werden.

Sei der Winkel, den die beiden Spiegel I und II mit einander bilden α und liege der leuchtende Punkt S so, daß $\angle SCI = \varphi$, mithin $\angle SCII = \alpha - \varphi$ ist. Bezeichnen wir dann die auf einander folgenden Bilder von S, wenn wir mit dem Bild in I beginnen, durch S mit einem unten

1) So steht es in den Lehrbüchern der Physik von Wüllner, Reis, Reichert-Hellmuth, Bänitz, Ule, Pisko etc. Unvollständig bei Eisenlohr, Dörner etc.

angefügten Index und die, wenn wir mit dem Bilde in II beginnen, durch S mit einem oben angefügten Index, so ist $\angle SCS_1 = 2\varphi$, $\angle SCS_2 = 2\alpha$, $\angle SCS_3 = 2\alpha + 2\varphi$, $\angle SCS_4 = 4\alpha$ und allgemein $\angle SCS_{2\nu} = 2\nu\alpha$, $\angle SCS_{2\nu+1} = 2\nu\alpha + 2\varphi$, wo die Bilder mit einem geraden Index entstanden sind, indem die Lichtstrahlen zuletzt von II reflectirt werden. Wenn die Winkel, welche einen geraden Index haben, so gerechnet werden, als ob sie von SC aus entstanden wären durch eine Drehung wie sie der Uhrzeiger macht, so sind die anderen Winkel nach der entgegengesetzten Richtung zu nehmen.

Für die anderen Bilder erhält man, indem man entweder direkt wie oben von S ausgeht oder in die obigen Werthe statt φ setzt $\alpha - \varphi$:

$\angle SCS^I = 2\alpha - 2\varphi$, $\angle SCS^{II} = 2\alpha$, $\angle SCS^{III} = 4\alpha - 2\varphi$, $\angle SCS^{IV} = 4\alpha$ und allgemein $\angle SCS^{2\nu} = 2\nu\alpha$, $\angle SCS^{2\nu+1} = (2\nu+2)\alpha - 2\varphi$, wo dann die Winkel mit geradem Index durch Drehung entgegengesetzt dem Uhrzeiger und die mit ungeradem durch Drehung wie die des Uhrzeigers entstanden sind.

1. Soll nun $S_{2\nu+1}$ das letzte Bild seyn, so muß dasselbe entweder auf die Verlängerung eines Spiegels oder in den Scheitelwinkel der Spiegel fallen, während $S_{2\nu}$ noch nicht so weit gekommen ist. Es muß demnach sein $\angle SCS_{2\nu+1} \geq 180^\circ - \alpha + \varphi$ und $\angle SCS_{2\nu} < 180^\circ - \varphi$ dies giebt

$$\frac{180^\circ - \varphi}{\alpha} \leq 2\nu + 1 < \frac{180^\circ + \alpha - \varphi}{\alpha}.$$

2. Soll $S_{2\nu+2}$ das letzte Bild seyn, so giebt die analoge Betrachtung:

$\angle SCS_{2\nu+2} \geq 180^\circ - \varphi$ und $\angle SCS_{2\nu} < 180^\circ - \alpha + \varphi$, also,

$$\frac{180^\circ - \varphi}{\alpha} \geq 2\nu + 2 < \frac{180^\circ + \alpha - \varphi}{\alpha}.$$

3. Soll $S^{2\nu+1}$ das letzte Bild seyn, so muß seyn $\angle SCS^{2\nu+1} \geq 180^\circ - \varphi$ und $\angle SCS^{2\nu} < 180^\circ - \alpha + \varphi$, also

$$\frac{180^\circ - \alpha + \varphi}{\alpha} \leq 2\nu + 1 < \frac{180^\circ + \varphi}{\alpha}.$$

4. Soll $S^{2\alpha+2}$ das letzte Bild seyn, so muß seyn

$$\frac{180^\circ - \alpha + \varphi}{\alpha} \leq 2\nu + 2 < \frac{180 + \varphi}{\alpha}.$$

Hieraus ergibt sich dann, wenn wir die Anzahl der Bilder der ersten Art mit a_* und die der zweiten mit a^* bezeichnen,

$$\frac{180^\circ - \varphi}{\alpha} \leq a_* < \frac{180 + \alpha - \varphi}{\alpha}, \quad 1.$$

$$\frac{180 - (\alpha - \varphi)}{\alpha} \leq a^* < \frac{180 + \varphi}{\alpha}, \quad 2.$$

und hiermit durch Addition die allgemeine Formel:

$$\frac{360^\circ - \alpha}{\alpha} \leq a_* + a^* < \frac{360 + \alpha}{\alpha},$$

oder

$$\frac{360}{\alpha} - 1 \leq a_* + a^* < \frac{360}{\alpha} + 1.$$

Hieraus folgt nun, daß das gewöhnlich aufgestellte Gesetz nicht richtig ist; denn es kann demnach auch seyn $a_* + a^* = \frac{360^\circ}{\alpha}$ wie es wirklich z. B. bei $\alpha = 72^\circ$ der Fall ist.

Ist $\varphi = \frac{\alpha}{2}$ d. h. liegt der leuchtende Punkt auf der Halbierungslinie des Winkels, den die Spiegel bilden, so is

$$\frac{180^\circ - \frac{\alpha}{2}}{\alpha} \leq a_* < \frac{180^\circ + \frac{\alpha}{2}}{\alpha}$$

oder

$$\frac{360}{2\alpha} - \frac{1}{2} \leq a_* < \frac{360}{2\alpha} + \frac{1}{2}$$

und dem entsprechend

$$\frac{360}{2\alpha} - \frac{1}{2} \leq a^* < \frac{360}{2\alpha} + \frac{1}{2}$$

Für $\alpha = 72^\circ$ ist dies

$2 \leq a_* < 3$, $2 \leq a^* < 3$ also wirklich

$$a_* + a^* = 4 = \frac{360^\circ}{72} - 1.$$

Ist $\frac{360^\circ}{2\alpha}$ eine ganze Zahl, oder $\frac{360}{\alpha}$ eine gerade Zahl, so ist zunächst ganz allgemein $a_* + a^* = \frac{360^\circ}{\alpha}$, aber es werden hier stets zwei Bilder in eins zusammenfallen, so daß

$a. + a^* = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1$, also das gewöhnlich aufgestellte Gesetz richtig ist. Es ist nämlich dann entweder

$$\angle SCS_{2\nu} + \angle SCS_{2\nu} = 360^\circ, \text{ weil } 2\nu = a. = \frac{180^\circ}{\alpha}, \text{ oder}$$

$$\angle SCS_{2\nu+1} + \angle SCS_{2\nu+1} = 360^\circ, \text{ weil } 2\nu + 1 = a^* = \frac{180^\circ}{\alpha}$$

ist.

Aus dem eben gefundenen Werth von $a.$ und a^* geht zugleich hervor, daß nur in dem speciellen Falle, daß $\frac{180^\circ}{\alpha}$ eine ganze Zahl ist, zwei Bilder in eins zusammenfallen können.

Ist α nicht ein Theiler von 360° , sondern $\frac{360^\circ}{\alpha} = n + \frac{\varrho}{\alpha}$ wo n eine ganze Zahl ist und ϱ den kleinsten positiven Rest bezeichnet, so erhält die obige Formel für die Anzahl der Bilder folgende Gestalt

$$n - 1 + \frac{\varrho}{\alpha} < a. + a^* < n + 1 + \frac{\varrho}{\alpha},$$

also ist im Allgemeinen

$$a. + a^* = n + 1 \text{ oder } n.$$

Um nun hier zu finden, wie die Anzahl der Bilder bestimmt werden kann, verfahren wir folgendermaßen. Wir setzen:

$$\frac{180^\circ}{\alpha} = \nu + \frac{\varrho'}{\alpha},$$

wo ϱ' den kleinsten positiven Rest bezeichnet, dann ist

$$n + \frac{\varrho}{\alpha} = 2\nu + \frac{2\varrho'}{\alpha}$$

und mithin,

$$\text{wenn } \frac{2\varrho'}{\alpha} > 1 \text{ ist, } n = 2\nu + 1,$$

$$\text{wenn } \frac{2\varrho'}{\alpha} < 1 \text{ ist, } n = 2\nu.$$

$\frac{2\varrho'}{\alpha} = 1$ ist bei unserer Annahme unmöglich; denn sonst wäre $\varrho = \alpha$ und also $\frac{360^\circ}{\alpha}$ ohne Rest theilbar.

Es ist nun nach 1. und 2.

$$\nu + \frac{\varrho' - \varphi}{\alpha} < a. < \nu + 1 + \frac{\varrho' - \varphi}{\alpha} \quad 1.*$$

$$v + \frac{\varrho' - (\alpha - \varphi)}{\alpha} < a^* < v + 1 + \frac{\varrho' - (\alpha - \varphi)}{\alpha} \quad 2^*, \text{ also}$$

$$2v + 1 + \frac{2\varrho'}{\alpha} < a_* + a^* < 2v + 1 + \frac{2\varrho'}{\alpha}.$$

Wenn demnach $\frac{2\varrho}{\alpha} < 1$ ist, so ist $a_* + a^* = 2v + 1$ oder $2v$ also $n + 1$ oder n , und wenn $\frac{2\varrho'}{\alpha} > 1$ ist, so ist $a_* + a^* = 2v + 1$ oder $2v + 2$ also n oder $n + 1$, mithin immer noch unbestimmt. Gehen wir nun zu den einzelnen Gleichungen 1^* und 2^* zurück, so folgern wir aus 1^* je nachdem $\varrho' = \varphi$ oder $< \varphi$ oder $> \varphi$ ist, $a^* = v$, $v + 1$, v und aus 2^* je nachdem $\varrho' = \alpha - \varphi$ oder $> \alpha - \varphi$ oder $< \alpha - \varphi$ ist, ist $a^* = v$, $v + 1$, v .

Die Combination dieser einzelnen Annahmen giebt folgende besondere Fälle.

1. $\varrho' = \varphi$, und $\varrho' = \alpha - \varphi$, ist nicht denkbar; denn dieß würde geben $\frac{360^\circ}{\alpha} = 2v + 1$.
2. $\varrho' = \varphi$ und nicht gleich $\alpha - \varphi$, oder $= \alpha - \varphi$ und nicht $= \varphi$; dann haben wir den im Obigen schon berührten Fall, daß ein Bild auf die Verlängerung eines Spiegels fällt. Dieß nämlich tritt ein, wenn

$$a_* = \frac{180^\circ - \varphi}{\alpha} = v + \frac{\varrho' - \varphi}{\alpha}$$

ist, also $a_* = v$,

oder, wenn

$$a^* = \frac{180^\circ - (\alpha - \varphi)}{\alpha} = v + \frac{\varrho' - (\alpha - \varphi)}{\alpha}, \text{ also } a^* = v.$$

Ist $\varrho' = \varphi$, $\varrho' < \alpha - \varphi$, so ist $2\varrho' < \alpha$, mithin $2v = n$, also $a_* + a^* = 2v = n$.

Ist $\varrho' = \varphi$, $\varrho' > \alpha - \varphi$, so ist $2\varrho' > \alpha$, mithin $2v + 1 = n$, also $a_* + a^* = 2v + 1 = n$.

Durch Vertauschung von φ mit $\alpha - \varphi$ erhalten wir die andere Combination $\varrho' = \alpha - \varphi$ und nicht gleich φ . Dieß giebt analoge Resultate.

3. $\varrho' < \varphi$ und $\varrho' < \alpha - \varphi$, also 2ν die Anzahl der Bilder, so ist $\frac{2\varrho'}{\alpha} < 1$, und $n = 2\nu$, mithin die Anzahl der Bilder n .
4. $\varrho' > \varphi$ und $\varrho' > \alpha - \varphi$ also $2\nu + 2$ die Anzahl der Bilder. Es ist hier $\frac{2\varrho'}{\alpha} > 1$, mithin $n + 1$ die Anzahl der Bilder.
5. Ist $\varrho' \geq \varphi$ und $\varrho' \leq \alpha - \varphi$, also $2\nu + 1$ die Anzahl der Bilder, mithin ist diese hier je nachdem $\frac{2\varrho'}{\alpha} < 1$ oder > 1 ist, $n + 1$ oder n .

Nachdem nun angegeben ist, wie in jedem besonderen Fall die Anzahl der Bilder gefunden werden kann, soll noch untersucht werden die Stellung, welche ein Auge zwischen den Spiegeln in der Ebene durch den leuchtenden Punkt senkrecht zur Spiegelkante einnehmen muß, um alle Bilder gleichzeitig beobachten zu können.

Bezeichnet A den Augenpunkt, so muß, wenn man von da aus z. B. das Bild S_ν sehen können soll, eine Gerade von S_ν nach A den Spiegel I. schneiden; denn nur so kann ein in I. reflectirter Strahl, der bekanntlich so reflectirt wird, als ob er von S_ν ausginge, das Auge treffen. Die äußerste Lage des Punktes A wird also seyn ein Punkt der Verlängerung der Geraden vom Spiegelbild durch den Scheitel des Winkelspiegels. Daraus ergibt sich folgende Zusammenstellung, je nachdem $S_{2\nu+1}$ oder $S_{2\nu+2}$ oder $S^{2\nu+1}$ oder $S^{2\nu+2}$ das letzte Bild ist.

1. $\angle ACI \geq 180^\circ - \angle ICS_{2\nu+1}$,
 $\geq 180^\circ - 2\nu\alpha - \varphi$,
2. $\angle ACI \geq (2\nu + 2)\alpha - 180^\circ + \varphi$,
3. $\angle ACI \geq (2\nu + 2)\alpha - 180^\circ - \varphi$,
4. $\angle ACI \leq 180 - (2\nu + 2)\alpha + \varphi$.

Man übersieht, daß die betreffende Bedingung für jedes beliebige A nur dann erfüllt ist, wenn das letzte Bild auf der Verlängerung eines Spiegels liegt.

Ist demnach z. B. $\alpha = 72^\circ$, so ist für $q < 36^\circ$ S_3 nur dann sichtbar, wenn $\angle ACI < 36^\circ - q$, dann ist auch S'' zu sehen, denn es ist $\angle ACI < 36^\circ + q$.

XIV. Bemerkung zur Elektromaschine.

Es ist behauptet worden, die rotirende Scheibe der Holtz'schen Maschine müsse möglichst dünn seyn, um eine gute Wirkung zu erhalten; und Hr. W. Veltmann folgert aus seiner Theorie, der gemäß diese Scheibe winkelrecht gegen ihre Flächen ein Elektrizitätsleiter seyn soll (Ann. Bd. 151 S. 514), daß die Wirkung ein Maximum erreichen würde, wenn man die Dicke der Scheibe $= 0$ machen könnte. — Hiergegen muß ich bemerken, schon im Jahre 1869 (Ann. Bd. 136, S. 174) angegeben zu haben, daß ich mit einer *drei* par. Linien dicken Scheibe von gutem altem Spiegelglase ganz dieselbe Wirkung bekam wie mit einer Scheibe aus Fensterglas von gewöhnlicher Dicke. Neuerdings habe ich dies bestätigt gefunden, als ich statt *einer* Scheibe aus geblasenem Glase, deren *zwei* auf die Axe steckte und gemeinschaftlich rotiren ließ. Jede dieser Scheiben hielt *drei* Millimeter in Dicke. Weder in der Funkenlänge (Maximum 8 par. Zoll) noch in der Funkenmenge war bei dieser Combination irgend eine Abnahme zu spüren. — Das Gesagte gilt für die Maschine erster Art; ob es auch für die zweiter Art richtig sey, habe ich bis jetzt noch nicht experimentell untersuchen können. Ich zweifle indess nicht daran.

P.